第9卷 第2期 自动化学报 Vol. 9, No. 2
1983年4月 ACTA AUTOMATICA SINICA Apr., 1983

系统可靠度最优布局的一种定性理论

谭维康 赵沁平
(北方交通大学) (北京航空学院)
何敬业
(太原工学院)

摘 要

本文研究在给定拓扑结构和单元可靠度的条件下系统可靠度的最优布局及一种定性理论,提出了系统可靠度最优布局等效唯一的概念,并进行了讨论。最后以两个实例说明定理的应用。

可靠度最优布局(或最优配置)是可靠度理论中的一个新课题,并将与可靠度冗余研究[1-7]发生紧密联系。文献[8]指出要研究系统结构中不同环节(元件)所处的地位、作用及不同的可靠度,并研究提高可靠度的方法。1979年,J. M. Kontoleon 提出了迭代算法,用 Fortran IV 在计算机上搜索系统可靠度最优布局[9]。文献[10]提出了一种最优布局原理,根据这个原理,解决了三种类型网络的最优布局问题。本文研究并串系统和串并系统的可靠度最优布局,以及可靠度最优布局的一种定性理论。

一、并串系统的最优布局

定理 1. 单元故障度分别为 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 的并串系统(见图1),其可靠度最优布局的充要条件是差值 ΔQ 最小,即

$$\Delta Q=\min_{w}\left|\prod_{\binom{n}{\alpha}} q_i-\prod_{\binom{n}{\alpha}}{}' q_j\right|. \qquad (1)$$

证明. 系统的可靠度函数为

$$R(q_1, q_2, \cdots, q_n)=1-\left(\prod_{\binom{n}{\alpha}} q_i+\prod_{\binom{n}{\alpha}}{}' q_j\right)+\prod_{\binom{n}{\alpha}} q_i \prod_{\binom{n}{\alpha}}{}' q_j. \qquad (2)$$

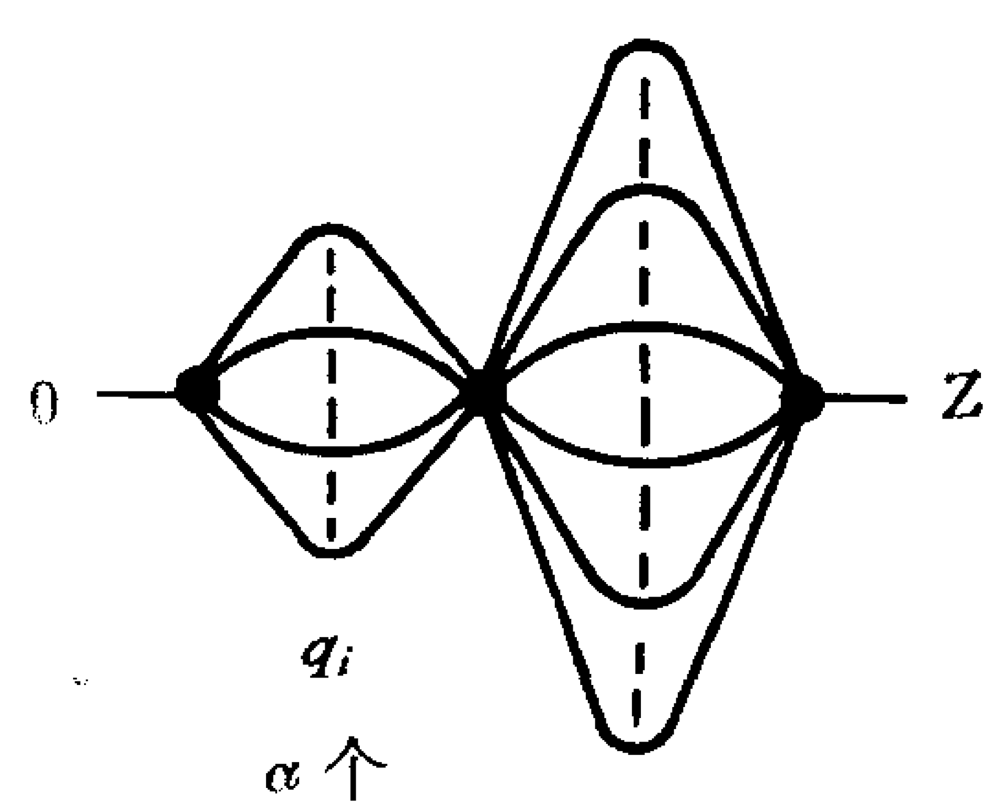

图1 并串系统的布局

无论哪一种布局 w,等式右边第一项和第三项是不变的,要使系统为最优布局,只需研究第二项。当 q_i, q_j 给定后,由于它们均系离散数值,因此

本文于1980年9月9日收到。

在所有可能的布局中，总能找到一种布局，使(2)式中 $\prod\limits_{\binom{n}{\alpha}} q_i$ 和 $\prod\limits_{\binom{n}{\alpha}}' q_j$ 之间差值 ΔQ 最小，即满足(1)式．(1)式中的 $\binom{n}{\alpha}$ 表示从 n 个中任意抽取 α 个．若用近似等式表示，有

$$\prod_{\binom{n}{\alpha}} q_i \approx \prod_{\binom{n}{\alpha}}{}' q_j. \tag{3}$$

下面把离散变量当作连续变量来进行分析．有关离散变量的分析方法和结果，限于篇幅，此处从略．连续变量的情况下，系统最优布局的充要条件可改为 $\Delta Q = 0$．近似等式(3)变为

$$\prod_{\binom{n}{\alpha}} q_i = \prod_{\binom{n}{\alpha}}{}' q_j. \tag{4}$$

在满足(4)式，系统可靠度布局已为最优布局，(2)式已取极大值，并在 $\prod\limits_{\binom{n}{\alpha}} q_i$ 中任取一个 q_s，$\prod\limits_{\binom{n}{\alpha}}' q_j$ 中任取一个 q_t，则有

$$\prod_{\binom{n}{\alpha}} q_i = q_s \prod_{\binom{n}{\alpha-1}} q_i, \tag{5}$$

$$\prod_{\binom{n}{\alpha}}{}' q_j = q_t \prod_{\binom{n}{\alpha-1}}{}' q_j, \tag{6}$$

$$q_s = \xi q_t \begin{cases} 当\ q_s < q_t\ 时, & 0 < \xi < 1 \\ 当\ q_s = q_t\ 时, & \xi = 1 \\ 当\ q_s > q_t\ 时, & \xi > 1. \end{cases} \tag{7}$$

把 q_s 与 q_t 的布局位置对调，则系统的可靠度函数(2)变为

$$R(q_1, q_2, \cdots, q_n, \xi) = 1 - \left(\xi + \frac{1}{\xi}\right) \prod_{\binom{n}{\alpha}} q_i + \prod_{\binom{n}{\alpha}} q_i \prod_{\binom{n}{\alpha}}{}' q_j. \tag{8}$$

对上式取一阶导数，并使之等于零，即

$$\frac{d}{d\xi} R(q_1, q_2, \cdots, q_n, \xi) = 0, \tag{9}$$

由上式得 $\xi = \pm 1$．在实际问题中，概率不存在负值，故不考虑 $\xi = -1$．当 $\xi = +1$ 时系统可靠度函数(2)取极值．又因为

$$\frac{d^2}{d\xi^2} R(q_1, q_2, \cdots, q_n, \xi) = -2\xi^{-3} \prod_{\binom{n}{\alpha}}{}' q_j < 0, \tag{10}$$

故当 $\xi = +1$ 时，式(2)取极大值．$\xi = 1$，即 $q_s = q_t$，它们在布局位置相互对调后，其可靠度函数与对调前一样，仍为极大值．当 $\xi \neq 1$ 时，即 $q_s \neq q_t$，布局位置的对调将使系统可靠度下降．这证明对调前的系统布局在满足(4)式时是最优布局，故假设为真．证毕．

二、串并系统的最优布局

定理 2. 单元可靠度分别为 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 的串并系统(见图 2)，其可靠度最优布局的充要条件是差值 ΔP 最大，即

$$\Delta P = \max_{w}\left|\prod_{\binom{n}{\alpha}} p_i - \prod_{\binom{n}{\alpha}}{}' p_i\right|. \tag{11}$$

证明方法与定理 1 相似，此处从略.

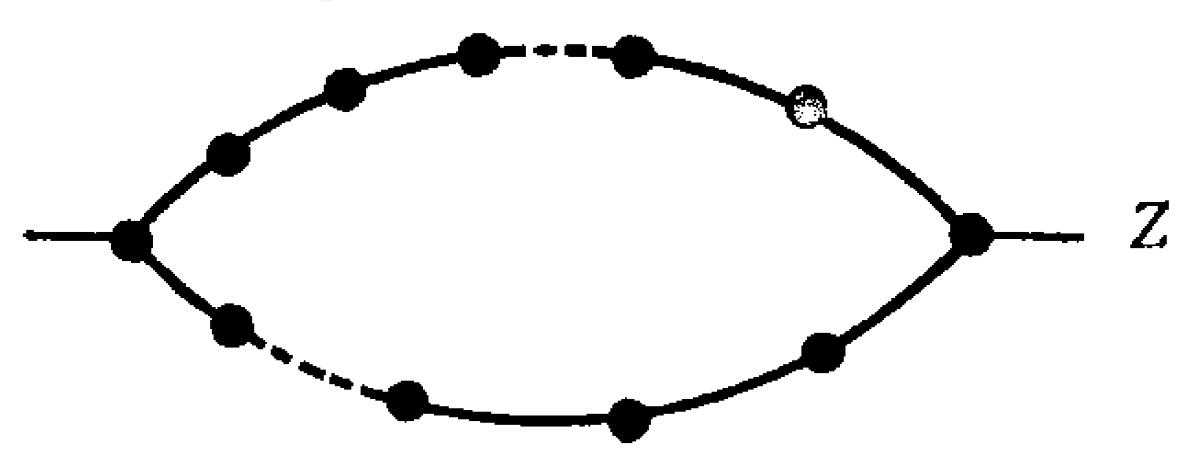

图 2　串并系统的布局

三、开路定理和短路定理

设 p_i 为系统中具有同一分布的诸单元的可靠度，$i=1, 2, \cdots, n$；w 为网络或系统的各种不同的布局方法；s 为系统中单元 p_n 故障断开或 p_1 短接后各种不同的网络结构型式；f_{ws}, g_{ws} 分别为系统中有一个单元 (p_1 或 p_n) 被短接或断开后网络的可靠度函数；$R_w(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ 为任意布局时系统的可靠度.

定理 3. 开路定理：在系统任意布局 $R_w(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ 中，当满足条件 $p_i \geqslant p_j$, $i<j$, $\forall p \in [0, 1]$ 时，如果系统最优布局等效唯一存在，p_n 断开时，余下网络结构的最优布局也都等效唯一存在. 网络结构及布局最优时的可靠度为

$$\lim_{p_n\to 0}\max_{w}\{R_w(p_1, p_2, \cdots, p_n)\} = \max_{w}\{\max_{s}[g_{ws}(p_1, p_2, \cdots, p_{n-1})]\}. \tag{12}$$

证明. 先把 p_n 取得任意小，在极限情况下，相当于 p_n 断开. 使之满足 $p_i \geqslant p_j$，从而不会改变最优布局方案. 这样，系统的可靠度函数可以展开[12]并化简：

$$\begin{aligned}&\lim_{p_n\to 0} R_w(p_1, p_2, \cdots, p_n)\\&\quad = \lim_{p_n\to 0}[p_n f_{ws}(p_1, p_2, \cdots, p_{n-1}) + (1-p_n) g_{ws}(p_1, p_2, \cdots, p_{n-1})]\\&\quad = g_{ws}(p_1, p_2, \cdots, p_{n-1}).\end{aligned} \tag{13}$$

如果 p_n 处在最优布局位置，而且 $p_n \to 0$，则要使 $R_w(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ 取得极大就必须使 $g_{ws}(p_1, p_2, \cdots, p_{n-1})$ 取极大值，即余下的 $(n-1)$ 个单元在结构上和布局上应全为最优. 由式(13)得

$$\begin{aligned}&\lim_{p_n\to 0}\max_{w}\{R_w(p_1, p_2, \cdots, p_n)\}\\&\quad = \max_{w}\{\max_{s}[g_{ws}(p_1, p_2, \cdots, p_{n-1})]\}.\end{aligned} \tag{14}$$

定理证毕.

应用这个定理可以方便地找到 p_n 的最优布局位置，进而可以使系统的最优布局问

题得到简化．与式(14)对应的系统布局就是它的最优布局．

这里要特别指出，对某些特殊系统，虽然存在最优布局，但在定理3的条件下不等效唯一．这时，再用定理3寻找系统的最优布局是不可能的．需要根据诸 p_i 间的条件求取最优布局．

在定理3的条件下，如能事先判别所给系统结构存在有等效唯一的最优布局，那么寻找 p_n 最优布局的位置还可进一步简化．在这种情况下，$p_1, p_2, \cdots, p_{n-1}$ 的大小允许以任意形式扩张分散或收缩集中逼近(0, 1)区间内任一定值 p，只要不破坏定理3的条件，最优布局方案就不会改变．这样式(14)有如下简化形式：

$$\lim_{p_n\to 0}\max_w\{R_w(p, p_n)\} = \max_s\{g_s(p)\}. \tag{15}$$

用(15)式来寻找 p_n 的最优布局位置要比(14)式方便．这时仅考虑余下 $(n-1)$ 个相同的 p 所组成的网络结构对系统可靠度的影响，当余下网络的结构最优时，式(15)的值最大．

定理 4. 短路定理：在系统任意布局 $R_w(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ 中，当满足条件 $p_i \geqslant p_j$, $i<j$, $\forall p\in[0, 1]$ 时，如果系统最优布局等效唯一存在，并当 p_1 短接时，余下的网络结构最优布局也等效唯一存在，则网络结构最优，布局也最优时的可靠度函数为

$$\begin{aligned}&\lim_{p_1\to 1}\max_w\{R_w(p_1, p_2, \cdots, p_n)\}\\ &\qquad = \max_w\{\max_s[f_{ws}(p_2, p_3, \cdots, p_n)]\}.\end{aligned} \tag{16}$$

证明．把 p_1 取得任意大，在极限情况下，相当于 $p_1=1$ 而被短接．因是在满足定理所提出条件下进行的，因而不会改变最优布局方案．这时，系统的可靠度函数便可展开为下列形式：

$$\begin{aligned}&\lim_{p_1\to 1} R_w(p_1, p_2, \cdots, p_n)\\ &\quad = \lim_{p_1\to 1}[p_1 f_{ws}(p_2, p_3, \cdots, p_n) + (1-p_1)g_{ws}(p_2, p_3, \cdots, p_n)]\\ &\quad = f_{ws}(p_2, p_3, \cdots, p_n).\end{aligned} \tag{17}$$

如果 p_1 已经处在系统最优布局位置，而且 $p_1\to 1$，则要使 $R_w(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ 取极大值就必须使 $f_{ws}(p_2, p_3, \cdots, p_n)$ 取极大值．即余下的 $(n-1)$ 个单元在结构上和布局上应全为最优．由式(17)可得

$$\begin{aligned}&\lim_{p_1\to 1}\max_w\{R_w(p_1, p_2, \cdots, p_n)\}\\ &\qquad = \max_w\{\max_s[f_{ws}(p_2, p_3, \cdots, p_n)]\}.\end{aligned} \tag{18}$$

定理证毕．

应用这个定理可找到 p_1 的最优布局位置，使系统的最优布局问题得到简化．与(18)式对应的系统布局就是所要寻找的最优布局．

应用定理4的条件和定理3同样严格．只有对那些能事先判别最优布局等效唯一存在的系统结构能够应用，并作如下简化：

$$\lim_{p_1\to 1}\max_w\{R_w(p_1, p)\} = \max\{f_s(p)\}. \tag{19}$$

用(19)式来寻找 p_1 的最优布局位置要比用(18)式迅速简便，因为这时只考虑了余下

$(n-1)$ 个相同的 p 所组成的网络结构对系统可靠度的影响.

利用开路定理和短路定理,如果系统可靠度最优布局是等效唯一的,则可以找到 p_n 和 p_1 的最优布局位置,而无需求出系统的最优布局.

四、举　例

例 1. 有 5 个单元，其故障度的关系满足条件 $q_5>q_4>q_3>q_2>q_1$，构成如图 3 所示的并串系统. 给出 (*a*), (*b*) 和 (*c*) 三组数据(见表 1)，试求与这三组数据所对应的最优布局.

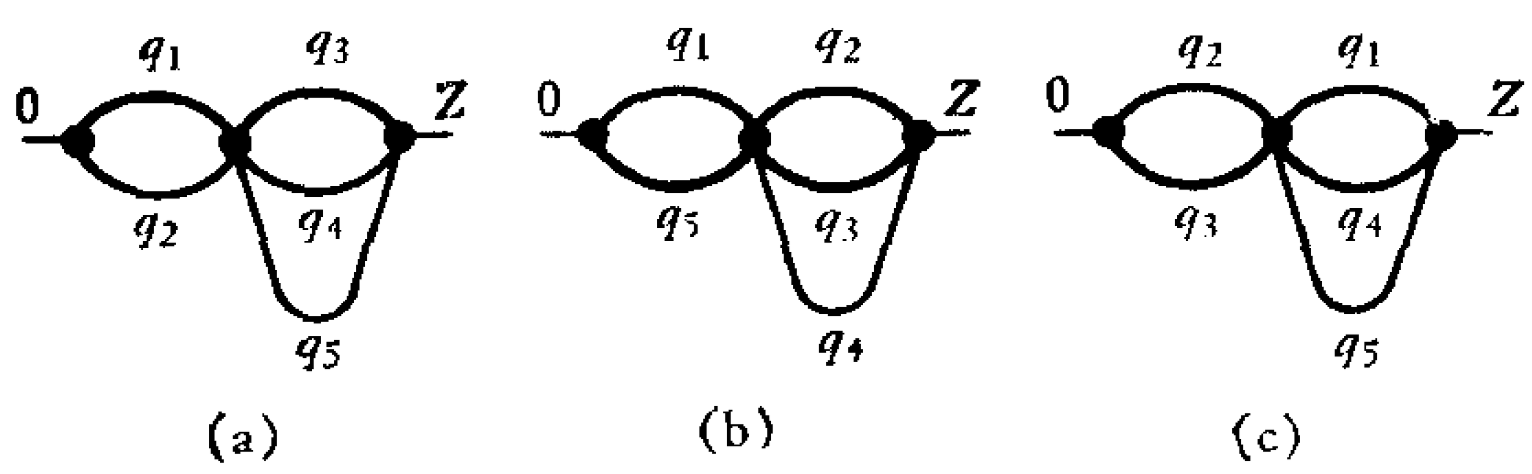

图 3　并串系统的最优布局

表　1

数　组	q_5	q_4	q_3	q_2	q_1
a	0.0510	0.0490	0.0425	0.0111	0.0089
b	0.1000	0.0508	0.0389	0.0256	0.0005
c	0.1995	0.1585	0.0089	0.0028	0.0008

由定理 1 的式(3),在近似等式两边取对数后,有

$$\log\prod_{\binom{5}{2}} q_i \approx \log\prod_{\binom{5}{2}}{}' q_j,\quad 即\quad \sum_{\binom{5}{2}}\log q_i \approx \sum_{\binom{5}{2}}{}'\log q_j.$$

为了求得系统的最优布局,上式近似等号两边的值显然最好取

$$K=\sum_{k=1}^{5}\log q_k/2.$$

计算数据列于表 2.

表　2

数组	$\log q_5$	$\log q_4$	$\log q_3$	$\log q_2$	$\log q_1$	K	R
a	−1.292	−1.310	−1.372	−1.955	−2.051	−3.990	0.9998
b	−1.000	−1.294	−1.410	−1.592	−3.301	−4.298	0.9999
c	−0.700	−0.800	−2.051	−2.553	−3.097	−4.601	0.9999

根据表 2 即可完成图 3 的最优布局. 注意到 (*a*), (*b*), (*c*) 这三组数据都满足 $q_5>q_4>q_3>q_2>q_1$，但是最优布局并不等效唯一. 图 3 中 (*a*), (*b*) 和 (*c*) 的最优布局显然不同. 由于 q_5, q_4, q_3, q_2 和 q_1 的大小允许以任意形式扩张分散,也允许收缩集中而逼近(0,1)区间内任一值 q. q_5 可无限接近 1, q_1 可无限接近 0. 这样,还可找到其余 6 种最优布局. 这种系统仅在 $q_5>q_4>q_3>q_2>q_1$ 的条件下不存在等效唯一的最优布局.

例 2. 对于有 4, 5, 6 个单元的并串系统和串并系统，最优布局如图 4 所示. 这里 $p_1>p_2>p_3>p_4>p_5>p_6$.

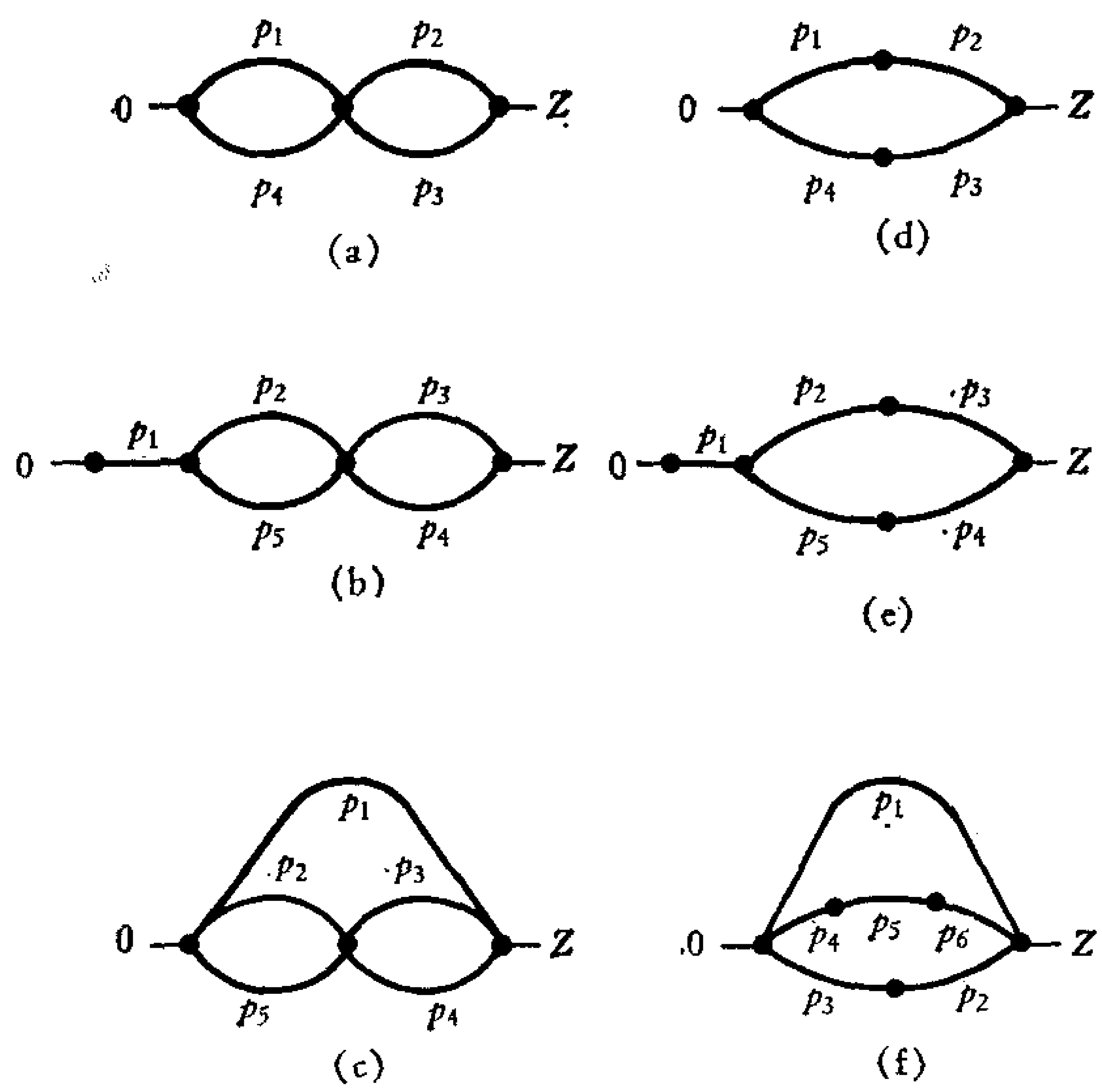

图 4　并串和串并系统最优布局

在图 4(a)中，无论 p_1，p_2，p_3 和 p_4 取哪一组数，只需满足 $p_1>p_2>p_3>p_4$，最优布局是等效唯一的。

五、讨　论

对于任意的拓扑结构，其可靠度最优布局总是唯一客观存在的．某些系统在条件 $p_i \geqslant p_j$，$i<j$ 得到满足时，便能找到唯一客观存在的最优布局，称这种系统为最优布局等效唯一的系统(如桥式系统)．另外一些系统，根据条件 $p_i \geqslant p_j$，$i<j$，则找不到唯一客观存在的最优布局，称这种系统为最优布局不等效唯一的系统(如图 4 的并串系统)．因为数据组的变化使 p_1，p_2，$\cdots$，p_n 的最优布局位置发生变化，进而最优布局也发生了变化．最优布局等效唯一的系统如果事先能被识别或被判别，那么本文所证明的开路定理和短路定理将是很有用的．它能帮助人们很快找到可靠度最高和可靠度最低的那个单元的最优布局位置，进而找到系统可靠度的最优布局方案．

参　考　文　献

[1] 疏松桂，最可靠控制系统的综合，自动化学报，6(1980)，8—17.

[2] Misra R. B. and Agnihotri, G., Peculiarities in Optimal Redundancy for a Bridge Network, *IEEE Trans. Reliability*, R-28 (1979), 70—72.

[3] Sharma, J. Venkateswaran, K. V., *IEEE Trans. Reliability*, R-20 (1971), 256—259.

[4] Narasimhalu, A. D. Sivaramakrishnan, H., A Rapid Algorithm for Reliability Optimization of Parallel Redundant Systems, *IEEE Trans. Reliability*, R-27 (1978), 261—263.

[5] Tillman, F. A., Hwang, C. L., Kuo, W., OptimizationTechniques for System Reliabillity with Redundancy-A Review, *IEEE Trans. Reliability*, R-26 (1977), 148—155.

[6] Kaufmann, A., Grouchko, D., Cruon, R., Mathematical Models for the Study of the Reliability of Systems, Academic Press, New York, (1977), 167—180.

[7] Bertram, L. Amstadter, Reliability Mathematics, McGraw-Hill Book Company, New York, (1971), 193—219.

[8] 王传善，运动学科学问题的瞻望，全国第一届运动学学术会议论文选集，科学出版社，(1961)，3—9.

[9] Kontoleon, J. M., Optimum Link Allocation of Fixed Topology Network, *IEEE Trans. Reliability*, R-28 (1979), 145—147.

[10] 谭维康、何敬业，网络可靠度最优配置，自动化学报，7(1981)，99—106.
[11] Hardy G. H., Littlewoed J. E., Polya G., Inequalities, Cambridge Univ. Press, London, 1952, 16—21.
[12] Moore E. F., Shennon, C. E., Reliable Circuits Using Less Reliable Relays, Franklin Inst., 262 (1956), 191—208, 281—297.

A QUALITATIVE THEORY ON THE OPTIMUM ALLOCATION OF SYSTEM RELIABILITY

Tan Weikang (North Jiao Tong University)
Zhao Qinping (Beijing Institute of Aeronautics)
He Jingye (Taiyuan College of Engineering)

Abstract

This paper deals with the problem of optimum allocation of the system reliability and a qualitative theory, after that the fixed topology network and a set of unit reliability are given. For solving these problems, related theorem properly is proposed. Conception of unique equivalent of optimum allocation of system reliability is proposed and also discussed. There are two examples, applications of these theorems are illustrated on solving optimum allocation of system reliability.

书刊介绍

《统 计 模 式 识 别》

«统计模式识别»一书（Statistical Pattern Recognition, Hayden Book company INC. Rochelle Park, New Jarsey, 1973）作者陈季镐（Chi-hau Chen），于1973年出版，以后曾多次再版。书中内容十分广泛，系统地阐述了统计模式识别方面几种关键方法发展的结果，着重于原理和概念，所用的数学推导则比较少. 全书共12章. 其中第一、二、四章提供有关统计模式识别的背景和基本概念. 第三、五、六、七、九、十、十一章介绍了若干种重要的方法，第八章讨论了与计算机之间的联系，第十二章讨论了与通信方面的联系，第五、六两章的内容对自动控制领域也是比较有用的.

全书十二章的标题如下：1）引言；2）进行分类的线性和非线性理论；3）模式的表示；4）特征的选择和抽取；5）监督的和非监督的参数估计；6）采用随机逼近的叠代算法；7）非参数方法和混合的决策理论；8）求聚合类（cluster）和搜索众数（mode）的方法；9）顺序的模式识别系统；10）具有有限记忆和反馈的识别系统；11）模式识别中的上下文分析；12）模式识别和通信理论.

本书作者是美国东南马萨诸塞大学电机系教授，早年从事自动控制方面工作，后转入研究信号处理及模式识别工作.

（戴汝为）