第22卷第1期 徐州师范大学学报(自然科学版) Vol.22,No.1
2004年3月 J. of Xuzhou Normal Univ.(Natural Science Edition) Mar.,2004

某复杂系统可靠性的近似置信限

查明明
(淮海工学院 数理系,江苏 连云港 222005)

摘要: 基于指数型元件的定数截尾寿命试验数据,给出了 k 个贮备系统组成的串联系统可靠性的近似置信限.

关键词: 串联系统;可靠性;指数分布
中图分类号: O213.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-6573(2004)01-0037-03

1 问题的提出

在元件和系统可靠性的评定中,指数型元件以及由其组成的复杂系统可靠性评定是一个基本而重要的研究内容,可在文献中查阅到许多研究结果,文献[1~3]对贮备系统可靠性的评定方法进行了讨论.本文讨论的指数型贮备系统是指冷贮备系统且转换开关每次使用都正常,即系统由一个转换开关、n 个相互独立的指数型元件组成.系统有一个元件工作,当它失效后,由转换开关瞬间切换上作冷贮备的元件.易见,当所有元件失效时,系统失效.设第 i 个元件的寿命为 X_i,又设 X_i 间相互独立,且

$$X_i \sim \begin{cases} \lambda_i e^{-\lambda_i x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

则系统寿命为 $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$.由独立随机变量和的分布理论,可以证明系统在 t 时刻的可靠性

$$R(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}, & \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \lambda, \\ \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1, j \neq i}^{n} \frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_i} \right) e^{-\lambda_i t}, & \lambda_i \neq \lambda_j,\ i \neq j. \end{cases}$$

对于由 k 个冷贮备系统组成的串联系统,如何评定其可靠性呢?本文将对此问题进行研究.

2 k 个贮备系统组成的串联系统的可靠性

设系统由 k 个指数型元件贮备系统串联而成,第 j 个贮备系统由 n_j 个独立同分布的指数型元件(参数为 λ_j)和一个切换开关(每次使用都正常)组成($j=1,2,\cdots,k$).则此串联系统在 t 时刻的可靠性为

$$R(t) = \prod_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{n_j-1} \frac{(\lambda_j t)^i}{i!} e^{-\lambda_j t} \right).$$

记 $R_j(t) = \sum_{i=1}^{n_j-1} \frac{(\lambda_j t)^i}{i!} e^{-\lambda_j t}$,则 $R_j(t)$ 为第 j 个贮备系统的可靠性,由此 $R(t) = \prod_{j=1}^{k} R_j(t)$.

3 $R(t)$的近似置信下限

设元件有定数截尾试验数据,即对失效率为 λ 的指数寿命型元件进行定数截尾寿命试验,设被试验元件数为 N,截尾数为 r,令

$$T = X_{(1)} + X_{(2)} + \cdots + X_{(r)} + (N-r)X_{(r)}, \quad X_{(1)} \leqslant X_{(2)} \leqslant \cdots \leqslant X_{(r)},$$

其中 $X_{(i)}$ 为 N 个被试元件中第 i 个失效元件的寿命,则 $2\lambda T \sim \chi^2(2r)$.

由此,对第 j 个贮备系统,有

收稿日期: 2004-02-05
作者简介: 查明明(1973—),男,江苏连云港市人,讲师,硕士生,主要从事工科数学的研究.

$$2\lambda_j T_j \sim \chi^2(2r_j),\quad j=1,2,\cdots,k,$$

这里

$$T_j = X_{(1)}^{(j)} + X_{(2)}^{(j)} + \cdots + X_{(r_j)}^{(j)} + (N_j - r_j)X_{(r_j)}^{(j)},$$

意义同上.

这样有 λ_j 的信赖分布

$$\lambda_j \sim \frac{1}{2T_j}\chi^2(2r_j),\quad j=1,2,\cdots,k.$$

显见 $R(t)$ 的精确信赖分布是难以求得的，为此我们来求 $R(t)$ 的近似信赖分布. 在求系统可靠性的经典近似置信限的方法中，常将元件的试验数据折合成系统的伪成败型试验数据 (N,S)，然后用单个成败型元件可靠性的经典置信限作为系统可靠性的近似置信限. 对于置信度 $1-\alpha$，单个元件可靠性的经典置信下限可由下列方程解出(试验数据为 (N,S))：

$$\sum_{i=S}^{N}\binom{N}{i}x^i(1-x)^{N-i}=\alpha.$$

而

$$\sum_{i=S}^{N}\binom{N}{i}x^i(1-x)^{N-i}=\int_0^x \frac{1}{\mathrm{B}(S,N-S+1)}t^{S-1}(1-t)^{N-S}\mathrm{d}t,$$

故对于置信度 $1-\alpha$，元件可靠性的经典置信下限为方程

$$\int_0^x \frac{1}{\mathrm{B}(S,N-S+1)}t^{S-1}(1-t)^{N-S}\mathrm{d}t=\alpha$$

之根. 由此，单个成败型元件若有成败型试验数据 (N,S)，则其可靠性的 fiducial 分布是 $\mathrm{B}(S,N-S+1)$ 分布. 本文选用 $\mathrm{B}(p,q)$ 分布作为 $R(t)$ 的近似分布，拟合原则是一、二阶矩相等. 在矩拟合法下，求出未知参数 p,q，从而由 $\mathrm{B}(p,q)$ 分布来确定系统可靠性 $R(t)$ 的在给定置信度下的置信下限.

先来计算 $E(R(t)),E(R^2(t))$.

由 $R(t)=\prod_{j=1}^{k}R_j(t)$，及 λ_j 间的独立性，可知 $E(R(t))=\prod_{j=1}^{k}E(R_j(t))$. 而

$$E(R_j(t))=E\left[\sum_{i=1}^{n_j-1}\frac{(\lambda_j t)^i}{i!}\mathrm{e}^{-\lambda_j t}\right]=\sum_{i=1}^{n_j-1}E\left(\frac{(\lambda_j t)^i}{i!}\mathrm{e}^{-\lambda_j t}\right),$$

由 $\lambda_j\sim\frac{1}{2T_j}\chi^2(2r_j)$，得

$$\begin{aligned}E(R_j(t))&=\sum_{i=0}^{n_j-1}\frac{1}{\Gamma(r_j)2^{r_j}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{i!}\left(\frac{t}{2T_j}x\right)^i\mathrm{e}^{-\frac{t}{2T_j}x}x^{r_j-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\mathrm{d}x\\&=\sum_{i=0}^{n_j-1}\frac{1}{\Gamma(r_j)2^{r_j}}\left(\frac{2T_j}{t+T_j}\right)^{i+r_j}\frac{1}{i!}\left(\frac{t}{2T_j}\right)^i\int_0^{+\infty}\left(\frac{t+T_j}{2T_j}x\right)^{i+r_j-1}\mathrm{e}^{-\frac{t+T_j}{2T_j}}\mathrm{d}\left(\frac{t+T_j}{2T_j}x\right)\\&=\sum_{i=0}^{n_j-1}\frac{1}{\Gamma(r_j)2^{r_j}}\left(\frac{2T_j}{t+T_j}\right)^{i+r_j}\frac{1}{i!}\left(\frac{t}{2T_j}\right)^iT(i+r_j)\\&=\left(\frac{T_j}{t+T_j}\right)^r\sum_{i=0}^{n_j-1}\binom{i+r-1}{r-1}\left(\frac{t}{t+T_j}\right)^i,\end{aligned}$$

由

$$R_j^2(t)=\mathrm{e}^{-2\lambda_j t}\left(\sum_{i=0}^{n_j-1}\frac{(\lambda_j t)^{2i}}{(i!)^2}+2\sum_{0\leqslant i<l\leqslant n_j-1}\frac{(\lambda_j t)^{i+l}}{i!l!}\right),$$

得

$$\begin{aligned}E(R_j^2(t))=\frac{1}{\Gamma(r_j)2^{r_j}}\Bigg(&\sum_{i=0}^{n_j-1}\frac{1}{(i!)^2}\left(\frac{t}{2T_j}\right)^{2i}\int_0^{+\infty}x^{2i+r_j-1}\mathrm{e}^{-\left(\frac{2t+T_j}{2T_j}\right)x}\mathrm{d}x\\&+2\sum_{0\leqslant i<l\leqslant n_j-1}\int_0^{+\infty}\frac{1}{i!l!}\left(\frac{t}{2T_j}\right)^{i+l}x^{i+l+r_j-1}\mathrm{e}^{-\left(\frac{2t+T_j}{2T_j}\right)x}\mathrm{d}x\Bigg)\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{T_j}{2t+T_j}\right)^{r_j} \left[\sum_{i=0}^{n_j-1} \binom{2i}{i} \binom{2i+r_j-1}{r_j-1} \left(\frac{t}{2t+T_j}\right)^{2i} + 2 \sum_{0 \leqslant i < l \leqslant n_j-1} \binom{i+l}{i} \binom{i+l+r_j-1}{r_j-1} \left(\frac{t}{2t+T_j}\right)^{i+l} \right].$$

这样,就由样本得到了 $E(R(t))$, $E(R^2(t))$.

若 $w \sim \mathrm{B}(p,q)$,则

$$E(w) = \frac{p}{p+q},\quad E(w^2) = \frac{p(p+1)}{(p+q)(p+q+1)}.$$

由矩拟合原则,令

$$E(R(t)) = E(w),\quad E(R^2(t)) = E(w^2),$$

得

$$\begin{cases} p = \dfrac{E(R(t))(E(R(t)) - E(R^2(t)))}{E(R^2(t)) - (E(R(t)))^2}, \\ q = \dfrac{(1-E(R(t)))(E(R(t)) - E(R^2(t)))}{E(R^2(t)) - (E(R(t)))^2}, \end{cases}$$

这里 $E(R(t)) = \prod_{j=1}^{k} E(R_j(t))$, $E(R^2(t)) = \prod_{j=1}^{k} E(R_j^2(t))$. 从而对于置信度 $1-\alpha$, $R(t)$的近似信赖置信下限 cl 为方程

$$\int_{cl}^{1} \frac{1}{\mathrm{B}(p,q)} x^{p-1}(1-x)^{q-1} \mathrm{d}x = 1-\alpha$$

的根. 至此,得到了计算系统可靠性置信下限的公式.

4　结束语

由于元件试验数据的和系统本身的复杂性,要由元件的试验数据寻找系统的经典精确置信限常常是困难的. 我们基于各元件的定数截尾试验数据,利用 β 分布来拟合系统可靠性的信赖分布,获得了系统可靠性在某一置信度下的近似置信下限. 可以看到,借助计算机不难求得方程的根.

我们还可就元件的失效率间满足某些关系,或元件的其它类型的试验数据来讨论系统可靠性的近似置信限. 限于篇幅,将另文讨论.

参考文献:

[1]　徐福荣. 系统可靠性评定方法论文集[C]. 杭州:浙江大学出版社,1998. 73—91.

[2]　吴和成. 指数型元件贮备系统可靠性的近似置信限[J]. 工程数学学报,2000,17(3):11.

[3]　吴和成. 贮备系统可靠性的 bootstrap 置信限[J]. 浙江大学学报(工学版),1998,32(6):652.

[4]　梅启智,廖炯生,孙惠中. 系统可靠性工程基础[M]. 北京:科学出版社,1992.

Approximate Confidence Limits of the Reliability for a Complex System

ZHA Ming-ming

(Department of Mathematics & Physics, Huaihai Institute of Engineering, Lianyungang, Jiangsu, 222005, China)

Abstract: In this paper, the formula to calculate lower confidence limits of the reliability for series system consisting of k standby systems is given.

Key words: series system; reliability; exponential distribution