

区间模型非概率可靠性指标的仿射算法*

NON-PROBABILISTIC RELIABILITY INDEX AND AFFINE ARITHMETIC

江涛** 陈建军*** 张弛江

(西安电子科技大学 机电工程学院, 西安 710071)

JIANG Tao CHEN JianJun ZHANG ChiJiang

(School of Mechanical-Electronic Engineering, Xidian University, Xi'an 710071, China)

摘要 针对标准区间运算易引发误差爆炸, 导致计算结果丧失实用价值的缺陷, 文中将不确定性变量的仿射型及仿射运算引入区间模型非概率可靠性指标的计算中。利用仿射型表示变量的不确定性, 由仿射运算计算出结构的响应区间(功能函数的上下界), 并由响应区间与其许用区间获得非概率可靠性指标。仿射运算的规则具有优化意义, 不会引发误差爆炸。以仿射运算求取区间模型非概率可靠性指标, 其计算精度远高于区间运算。

关键词 区间模型 噪声符号 仿射型 仿射运算

中图分类号 O213.2

Abstract For the first time, affine forms of bounded uncertain quantities and affine arithmetic are introduced into modeling and calculating the nonprobability reliability index. A method for reciprocal transformation between interval variables and affine forms is developed. Synchronously, how a more accurate nonprobability reliability index can be found by using affine arithmetic is expatiated thoroughly. The affine arithmetic for getting the nonprobability reliability index is small in computational complexity and simple in analytic process, and can be implemented by craft. An example validates its rationality and accuracy.

Key words Interval model; Noise symbol; Affine form; Affine arithmetic

Corresponding author: JIANG Tao, E-mail: tjiaog@mail.xidian.edu.cn, Fax: +86-29-88208327

The project supported by the Natural Science Foundation of Shaanxi Province, China (No. D7010418) and the National Defense Advanced Research Fund, China (No. 51421060505DZ0155).

Manuscript received 20050707, in revised form 20050918.

1 引言

基于区间模型的非概率可靠性指标 η 定义如下, 设以区间变量为自变量的结构功能函数表为 $g(\vec{x})$, 其中 $\vec{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ ($\bar{x}_i \triangleq [x_i^L, x_i^U]$ ($i = 1, 2, \dots, n$)) 为影响结构功能的区间变量组成的向量。当 $g(\cdot)$ 为 $\vec{x}$ 各分量的连续函数时, 其值域必然也是区间变量(记作 $\bar{y} \triangleq [y^L, y^U]$)。再设结构响应的允许区间为 $\bar{y} \triangleq [y^L, y^U]$, 则该结构的 η 可表为

$$\eta = (y^c - g^c) / (y^r + g^r) \quad (1)$$

式中 $y^c = (y^L + y^U) / 2$, $y^r = (y^U - y^L) / 2$, $g^c = (g^L + g^U) / 2$, $g^r = (g^U - g^L) / 2$ 。

当前, 求取 η 的通用方法是区间运算(interval arithmetic, 记作 IA), 计算量集中在求取 $g(\cdot)$ 的上下界(g^U 和 g^L), 然而区间运算结果极易扩张^[1]和溢出^[2,3], 这源于区间运算规则的不合理性^[4,5]。当 $g(\cdot)$

为高度非线性函数或嵌套越深时, 误差爆炸(error explosion) 的强度越大, 从而导致计算所得的 η 毫无意义。完全忽略变量之间的相关性, 加之倒数运算的溢出误差(over shoot error) 以及对数、开方等运算的圆整误差(round off error) 是误差爆炸的直接原因^[6]。为克服这些缺陷, 已经出现了如特征值质量包含定理和刚度包含定理^[7]、区间有限元法^[8]、增量载荷法^[9]以及区间参数摄动法^[10]等区间运算的改进算法, 但都因分析过程繁琐、计算量大且结果不稳定, 从而适用面有限。

仿射运算(affine arithmetic, 记作 AA) 作为新近出现的处理不确定性的方法, 其运算规则具有优化性质^[5], 比较稳定。其已经被应用在信号处理^[11]、准静态电场分析^[12]、人工智能^[13]及电路分析^[14]中。原始不确定性变量的仿射型是噪声符号的线性组合, 如果两个仿射型中拥有同一噪声符号, 则二者相关^[4]。拥有相同噪声符号数目越多, 相关性越大^[6]。这一性质

* 20050707 收到初稿, 20050918 收到修改稿。陕西省自然科学基金(D7010418) 和国防预研基金(51421060505DZ0155) 项目资助。

** 江涛, 男, 1975 年 10 月生, 西安人, 汉族。西安电子科技大学博士研究生, 研究方向为机械结构的可靠性和优化设计, 发表论文 10 篇。

*** 陈建军, 男, 1951 年 12 月生, 河北保定人, 汉族。西安电子科技大学教授, 博士生导师, 研究方向为计算结构力学及机械可靠性, 发表论文 70 余篇。

使得仿射运算能体现变量之间的相关性,加之其运算规则的优化性质,致使仿射运算能最大限度地避免误差爆炸,这是其能被迅速应用的直接原因。

鉴于不确定性变量的仿射型和区间形式可以相互转化,本文将不确定性变量的仿射型及仿射运算引入到非概率可靠性指标 η 的计算中,即将基于区间模型的 $g(\bar{x})$ 转化成仿射形式,由仿射运算计算出式(1)中 $g(\cdot)$ 的上下界,即 g^U 和 g^L ,便可得出 η 。由仿射运算计算得到 η 的精度远高于区间运算。

2 不确定性的仿射型和区间运算的误差爆炸

2.1 仿射型与区间变量

设由于自身或环境原因有 t 种噪声共同影响不确定性量 x 的真值,则其仿射型 $\hat{x}$ 表示为这 t 个噪声符号的一次多项式^[4],如下

$$\hat{x} = x_0 + x_1 \varepsilon_1 + x_2 \varepsilon_2 + \dots + x_t \varepsilon_t \quad (2)$$

式中 x_0 是 $\hat{x}$ 的中心值; $\varepsilon_j \in [-1, 1]$ ($j = 1, 2, \dots, t$) 是第 j 个噪声符号,其系数 $x_j \in R$ ($j = 1, 2, \dots, t$) 称为 $\hat{x}$ 的第 j 个偏增量。

由于 $\varepsilon_j \in [-1, 1]$ ($j = 1, 2, \dots, t$) 代表不同的噪声,所以相互独立,故当 $|\varepsilon_1| = |\varepsilon_2| = \dots = |\varepsilon_t| = 1$ 时, $\hat{x}$ 取得其最小和最大值。因此,可得 $\hat{x}$ 的区间形式 $\bar{x}$,可记作

$$\bar{x} = \left[x_0 - \sum_{j=1}^t |x_j|, x_0 + \sum_{j=1}^t |x_j| \right] \quad (3)$$

式(3)代表的转化过程造成仿射型原有信息的丢失,而其逆过程不会丢失的信息得到还原。设

$$\hat{x}_1 = 10 + 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_4$$

$$\hat{x}_2 = 20 - 3\varepsilon_1 + \varepsilon_3 + 4\varepsilon_4$$

因 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 相互独立,据式(3)可得 $\bar{x}_1 = [6, 14]$ 及 $\bar{x}_2 = [12, 28]$, 则向量 $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ 位于图1所示的二维坐标平面内的矩形 $[6, 14] \times [12, 28]$ 中。但是由于 $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ 都拥有 ε_1 和 ε_4 , 故二者不完全独立,则向量 $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ 仅位于图1中的凸8边形内。很明显,凸8边形是矩形的子集。这说明不确定性变量的仿射型向区间形式的转化有可能造成原有信息的丢失。

同一个变量出现在函数的不同项时,AA 能够最大程度的保留其完全相关性,而 IA 会造成严重的信息丢失^[6]。

以 $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1/2} / \sqrt{x^2 + 1/2}$ ($x \in [-2, 2]$) 为例。将 $[-2, 2]$ 区间 16 等分,例如当 $x \in [0.5, 0.75]$ 时,可以分别以区间和仿射型表示为 $\bar{x} \triangleq [0.5, 0.75]$ 和 $\hat{x} = 0.625 + 0.125\varepsilon$ ($\varepsilon \in [-1, 1]$), 分别代入 $f(x)$ 得 $f(\bar{x})$ 和 $f(\hat{x})$, 经计算得

$$f(\bar{x}) \in [0.0, 0.866 0] \quad f(\hat{x}) \in [0.531 0, 0.577 3]$$

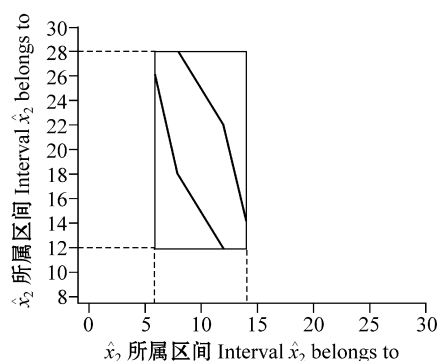


图1 仿射型 $\hat{x}_1$ 和 $\hat{x}_2$ 的相关性

Fig.1 Dependency between affine forms $\hat{x}_1$ and $\hat{x}_2$

此外,因 $f(x)$ 在 $[0.5, 0.75]$ 内单调减,故 $f(x)$ 的真值区间是 $[f(0.75), f(0.5)] = [0.542 3, 0.577 3]$ 。可见,由于 IA 的误差爆炸致使 $f(\bar{x})$ 的上下界出现了严重误差,其结果已无意义;而由 AA 所得 $f(\hat{x})$ 的上界与真值区间的上界重合,仅下界存在微小误差。区间 $[0.5, 0.75]$ 及其他区间内的 IA 与 AA 的结果对比见图2、图3。可见 AA 的计算精度很高,而 IA 由于误差爆炸,其计算结果是真值区间的几十倍。

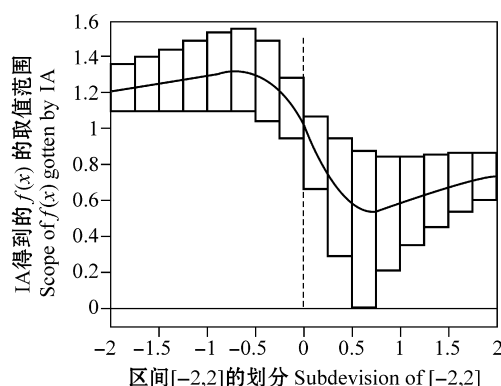


图2 IA引起的误差爆炸

Fig.2 Error explosion resulted by IA

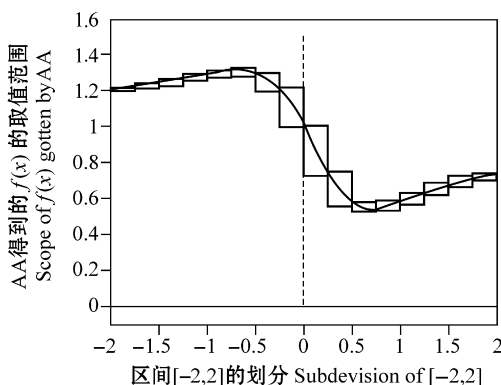


图3 $[-2, 2]$ 区间内 AA 的计算结果

Fig.3 Computational accuracy of AA

2.2 仿射运算规则

任何以仿射型或实数为自变量的仿射运算其返回值必须是一仿射型(噪声符号的一次多项式)^[4]。这里仅给出仿射型的加减乘除四则运算,其余运算规则见

文献[5]。

设仿射型 $\hat{x} = x_0 + x_1 \varepsilon_1 + x_2 \varepsilon_2 + \dots + x_t \varepsilon_t$

$\hat{y} = y_0 + y_1 \varepsilon_1 + y_2 \varepsilon_2 + \dots + y_t \varepsilon_t$ 及 $\beta \quad R, \zeta \quad R$

则有

$$\hat{x} \pm \hat{y} = (x_0 \pm y_0) + (x_1 \pm y_1) \varepsilon_1 + \dots + (x_t \pm y_t) \varepsilon_t$$

$$\beta \hat{x} = (\beta x_0) + (\beta x_1) \varepsilon_1 + \dots + (\beta x_t) \varepsilon_t$$

$$\hat{x} \pm \hat{\zeta} = (x_0 \pm \zeta) + x_1 \varepsilon_1 + \dots + x_t \varepsilon_t$$

$$\hat{x} \cdot \hat{y} = x_0 y_0 + \sum_{j=1}^t (x_0 y_j + y_0 x_j) \varepsilon_j +$$

$$\left(\sum_{j=1}^t x_j y_j \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^t y_j \varepsilon_j \right)$$

$$\hat{x}/\hat{y} = \hat{x} \cdot (1/\hat{y}) = \hat{x} \cdot [1/(y_0 + y_1 \varepsilon_1 + y_2 \varepsilon_2 + \dots + y_t \varepsilon_t)]$$

乘法运算式中出现了噪声符号的二次项, 令

$Q(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_t) = \left(\sum_{j=1}^t x_j y_j \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^t y_j \varepsilon_j \right)$ 。现需引入一个新的(第 $t+1$ 个) 噪声符号 ε_{t+1} 的仿射型替代之。由于 Q 的定义域是边长为 2 的以 $(\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 0, \dots, \varepsilon_t = 0)$ 为对称中心的 t 维正方体, 且有

$$Q(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_t) = Q(-\varepsilon_1, -\varepsilon_2, \dots, -\varepsilon_t)$$

故可根据 Chebyshev 仿射理论^[4] 得到 Q 的最优仿射型: 设 Q 在定义域内的最大和最小值分别是 b 和 a , 有

$$Q(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_t) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \varepsilon_{t+1}。至此, \hat{x} \cdot \hat{y} 应$$

改写为

$$\hat{x} \cdot \hat{y} = \left(x_0 y_0 + \frac{a+b}{2} \right) + \sum_{j=1}^t (x_0 y_j + y_0 x_j) \varepsilon_j + \frac{b-a}{2} \varepsilon_{t+1}$$

设除法运算式中的 $1/(y_0 + y_1 \varepsilon_1 + y_2 \varepsilon_2 + \dots + y_t \varepsilon_t)$ 项的仿射型记作

$$\alpha(y_0 + y_1 \varepsilon_1 + y_2 \varepsilon_2 + \dots + y_t \varepsilon_t) + \xi + \delta \varepsilon_{t+1}$$

该项的几何含义是在区间

$$[a, b] = [y_0 - |y_1| - |y_2| - \dots - |y_t|, y_0 + |y_1| + |y_2| + \dots + |y_t|]$$

内以直线 $z = \alpha y + \xi$ 逼近曲线 $z = 1/y$, 见图 4。该项中

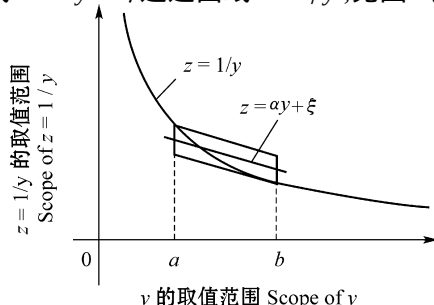


图 4 倒数运算的仿射拟合

Fig. 4 Mir-range approximation for reciprocal operation

δ 是误差的幅值。

据 Mir-range 仿射理论^[5] 知, α 的几何意义是 $y = b$ 点处曲线的斜率, ξ 为自由项, 由图 4 可见误差绝对值最大的点出现在 $y = a$ 和 $y = b$ 两点处, 故引入第 $t+1$ 个噪声符号 ε_{t+1} 予以补偿, 其系数 δ 是最大误差减小误差的 $1/2$ 倍。经计算得 $\alpha = -1/b^2$, $\xi = (a+b - a^2/b - ab^2/b)/(2ab)$ 又 $\delta = [a - b + (a^2/b - ab^2/b)\alpha]/(2ab)$ 。故 $1/\hat{y}$ 的仿射型记作

$$1/\hat{y} = - (1/b^2) \cdot (y_0 + y_1 \varepsilon_1 + y_2 \varepsilon_2 + \dots + y_t \varepsilon_t) + (a+b - a^2/b - ab^2/b)/(2ab) \left\{ [a - b + (a^2/b - ab^2/b)\alpha]/(2ab) \right\} \varepsilon_{t+1} = - (1/b^2) \cdot y_0 + (a+b - a^2/b - ab^2/b)/(2ab) - \left\{ \frac{1}{b^2} y_1 \varepsilon_1 - \left(\frac{1}{b^2} \right) y_2 \varepsilon_2 + \dots - \left(\frac{1}{b^2} \right) y_t \varepsilon_t + \left\{ [a - b + (a^2/b - ab^2/b)\alpha]/(2ab) \right\} \varepsilon_{t+1} \right\}$$

3 将仿射运算引入区间模型非概率可靠性指标计算

计算出式(1)中 $g(\vec{x})$ 的第 i ($i = 1, 2, \dots, n$) 分量的中点 $(x_i^L + x_i^U)/2$, 将其作为第 i 分量仿射型的中心值, 即

$$x_{i0} = (x_i^L + x_i^U)/2$$

将第 i ($i = 1, 2, \dots, n$) 分量区间宽度的 $1/2$ 作为第 1 噪声符号 ε_1 ($\varepsilon_1 \in [-1, 1]$) 的系数, 即

$$x_{i1} = (x_i^U - x_i^L)/2$$

至此, 即将 $g(\vec{x})$ 的第 i ($i = 1, 2, \dots, n$) 分量由区间形式转化成为拥有一个噪声符号的如下仿射型

$$\hat{x}_i = x_{i0} + x_{i1} \varepsilon_1 = \frac{x_i^L + x_i^U}{2} + \frac{x_i^U - x_i^L}{2} \varepsilon_1$$

由上式替代 $g(\vec{x})$ 中的 $\vec{x}_i$, 就可将 $g(\vec{x})$ 转化成仿射函数 $g(\hat{x})$ 。应用 2.2 节所述仿射运算规则计算出 $g(\hat{x})$, 假设计算结果是

$$g(\hat{x}) = g_0 + g_1 \varepsilon_1 + g_2 \varepsilon_2 + \dots + g_{k+1} \varepsilon_{k+1}$$

式中 $\varepsilon_2 \sim \varepsilon_{k+1}$ 是计算过程中根据需要引入的 k 个新噪声符号。

则据式(3)可得

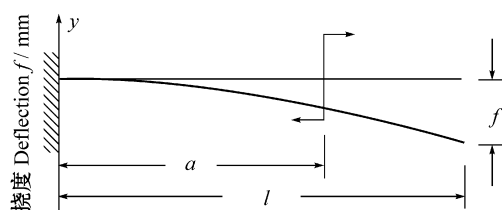
$$g^L = g_0 - |g_1| - |g_2| - \dots - |g_{k+1}| \text{ 及}$$

$$g^U = g_0 + |g_1| + |g_2| + \dots + |g_{k+1}|$$

将该式代入式(1), 便可得非概率可靠性指标 η 。

4 算例

如图 5 所示长度 $l = 300$ mm 的悬臂梁, 其弹性模量 $E = 200$ GN/m², 截面惯性矩 $I = 200$ mm⁴。在距固定端 $\bar{a} = [150, 250]$ mm 处施加一力偶 $\bar{M} = [2\,000, 5\,000]$ N·m。已知梁沿 y 轴方向的许用挠度为 $\bar{y} = [1.5, 10]$ mm。求该梁的非概率可靠性指标。



悬臂梁的长度方向 / mm
Direction in length of the beam / mm

图5 悬臂梁施加受力偶图

Fig. 5 A cantilever beam with a constant force loaded

易知该梁的挠度 f 与以上所有参数的函数关系为

$$f = \frac{Ma}{EI} \left[l - \frac{1}{2}a \right] \quad (4)$$

将 $\bar{M}$ 和 $\bar{a}$ 代入式(4), 可得 f 区间表达式

$$f = \frac{[2\,000, 5\,000]}{200 \times 10^6 \times 200} \left[150, 250 \right] \left[300 - \frac{1}{2}[150, 250] \right]$$

进行标准区间运算, 得

$$\begin{aligned} f &= \frac{[2\,000, 5\,000]}{200 \times 10^6 \times 200} [150, 250] \left(300 - \frac{1}{2}[150, 250] \right) = \\ &= \frac{[2\,000, 5\,000]}{200 \times 10^6 \times 200} [150, 250] [300 - [75, 125]] = \\ &= \frac{[2\,000, 5\,000]}{200 \times 10^6 \times 200} [150, 250] [175, 225] = \\ &= \frac{[2\,000, 5\,000]}{200 \times 10^6 \times 200} [26\,250, 56\,250] = \\ &= \frac{[5\,250\,000, 281\,250\,000]}{200 \times 10^6 \times 200} = \\ &= [0.001\,312\,5, 0.007\,031\,25] \text{ m} \end{aligned}$$

再将 f 转换成与 $\bar{y}$ 相同的单位 mm, 再将二者代入式(1), 得

$$\eta_{IA} = \frac{5.75 - 4.171\,875}{4.25 + 2.859\,375} = 0.221\,978$$

因力偶与其施加位置相互独立, 故可据式(2)将 $\bar{M}$ 和 $\bar{a}$ 转化成为拥有独立噪声符号的仿射型, 即 $M = 3\,500 + 1\,500\varepsilon_1$ 和 $a = 200 + 50\varepsilon_2$, 代入式(4), 得

$$\begin{aligned} f &= \frac{(3\,500 + 1\,500\varepsilon_1)}{200 \times 10^6 \times 200} (200 + 50\varepsilon_2) \left[300 - \frac{1}{2}(200 + 50\varepsilon_2) \right] = \\ &= \frac{(3\,500 + 1\,500\varepsilon_1)}{200 \times 10^6 \times 200} (200 + 50\varepsilon_2) [300 - (100 + 25\varepsilon_2)] = \\ &= \frac{(3\,500 + 1\,500\varepsilon_1)}{200 \times 10^6 \times 200} (200 + 50\varepsilon_2) (200 - 25\varepsilon_2) = \\ &= \frac{(3\,500 + 1\,500\varepsilon_1)}{200 \times 10^6 \times 200} (200 \times 200 + 200 \times 25\varepsilon_2 - \\ &\quad 50 \times 25\varepsilon_2^2) \end{aligned}$$

因 ε_2 自身完全相关, 故上式中的 $0 \leq 50 \times 25\varepsilon_2^2 \leq 1\,250$, 引入新噪声符号 ε_3 的仿射型 $625 + 625\varepsilon_3$ 替代之, 得

$$f = \frac{(3\,500 + 1\,500\varepsilon_1)}{200 \times 10^6 \times 200} [200 \times 200 + 200 \times 25\varepsilon_2 - (625 +$$

$$\begin{aligned} 625\varepsilon_3)] &= \frac{(3\,500 + 1\,500\varepsilon_1)}{200 \times 10^6 \times 200} (39\,375 + 5\,000\varepsilon_2 - \\ 625\varepsilon_3) &= (3\,500 \times 39\,375 + 3\,500 \times 5\,000\varepsilon_2 - 3\,500 \times \\ 625\varepsilon_3 + 1\,500 \times 39\,375\varepsilon_1 + 1\,500 \times 5\,000\varepsilon_1\varepsilon_2 - \\ 1\,500 \times 625\varepsilon_1\varepsilon_3) &/ (200 \times 10^6 \times 200) \end{aligned}$$

上式噪声符号二次项 $1\,500 \times 5\,000\varepsilon_1\varepsilon_2 - 1\,500 \times 625\varepsilon_1\varepsilon_3$ 等价于 $\varepsilon_1(1\,500 \times 5\,000\varepsilon_2 - 1\,500 \times 625\varepsilon_3)$, 因 $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ 相互独立, 有

$$-8\,437\,500 \leq (1\,500 \times 5\,000\varepsilon_2 - 1\,500 \times 625\varepsilon_3) \leq 8\,437\,500$$

又因 $-1 \leq \varepsilon_1 \leq 1$, 故

$$-8\,437\,500 \leq (1\,500 \times 5\,000\varepsilon_1\varepsilon_2 - 1\,500 \times 625\varepsilon_1\varepsilon_3) \leq 8\,437\,500$$

引入新噪声符号 ε_4 的仿射型 $0 + 8\,437\,500\varepsilon_4$ 替代之, 得

$$\begin{aligned} f &= (3\,500 \times 39\,375 + 3\,500 \times 5\,000\varepsilon_2 - \\ &\quad 3\,500 \times 625\varepsilon_3 + 1\,500 \times 39\,375\varepsilon_1 + \\ &\quad 8\,437\,500\varepsilon_4) / (200 \times 10^6 \times 200) \end{aligned}$$

上式是 f 的标准仿射型, 且 $\varepsilon_1 \sim \varepsilon_4$ 相互独立, 可得 $0.001\,265\,625 \text{ m} \leq f \leq 0.005\,625 \text{ m}$, 将 f 转换成与 $\bar{y}$ 相同的单位 mm, 再将二者代入式(1), 得

$$\eta_{AA} = \frac{5.75 - 3.445\,312\,5}{4.25 + 2.179\,687\,5} = 0.358\,444$$

可见, 经测算 f 真实的响应区间是 $[1.687\,5, 5.468\,75] \text{ mm}$, 代入式(1)真实的 $\eta_{TRUE} = \frac{5.75 - 3.578\,125}{4.25 + 1.890\,625} = 0.353\,689$ 。可见 η_{AA} 与 η_{TRUE} 仅存在微小误差。 η_{AA} 与 η_{TRUE} 的误差很大, 其原因在于在计算 $\left[l - \frac{1}{2}a \right]$ 时, IA 体现不出 $\bar{a}$ 的自身的相关性, 导致了误差爆炸, 即 $\left[l - \frac{1}{2}a \right] = [26\,250, 56\,250]$, 而其真值区间应是 $[33\,750, 43\,750]$ 。

5 结论

针对同一问题, AA 的计算量略大于 IA , 其原因在于 AA 过程中包含着优化意义上的仿射逼近。但为了高精度的计算结果还是值得的。 AA 相对于其他优化算法^[15,16] 的计算量是相当小的, 且不必考虑收敛准则和迭代初始点的选取, 求解过程可由手工完成。故将仿射型及 AA 引入到区间模型非概率可靠性指标的计算, 不仅有理论意义, 也具有广阔的工程应用前景。

参考文献 (References)

- 王登刚, 李杰. 计算不确定结构系统静态响应的一种可靠方法. 计算力学学报, 2003, 20(6): 662~668.
WANG DengGang, LI Jie. A reliable approach to compute the static re-

- sponse of uncertain structural system. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2003, 20(6): 662 ~ 668 (In Chinese).
- 2 刘长虹, 陈 虬. 基于信息熵理论中的含模糊参数的响应面法. 机械强度, 2003, 25(2): 187 ~ 189.
LIU ChangHong, CHEN Qiu. Response surface method in fuzzy parameters under the entropy. Journal of Mechanical Strength, 2003, 25(2): 187 ~ 189 (In Chinese).
- 3 刘长虹, 陈 虬. 基于粗糙集理论下的结构随机分析中的有限元法. 机械强度, 2004, 26(3): 274 ~ 277.
LIU ChangHong, CHEN Qiu. Analysis of the random structure with the rough set theory. Journal of Mechanical Strength, 2003, 25(2): 187 ~ 189 (In Chinese).
- 4 Jorge Stolfi, Luiz Henrique, Figueiredo. Self-validated numerical methods and applications. Monograph for 21st Brazilian Mathematics Colloquium, IMPA, Rio de Janeiro, 1999.
- 5 Shou H, Martin R, Voiculescu I, Bowyer A, Wang G. Affine arithmetic in matrix form for polynomial evaluation and algebraic curve drawing. Progress in Natural Science, 2002, 12(1): 77 ~ 80.
- 6 Luiz Henrique de Figueiredo, Jorge Stolfi. Affine arithmetic: concepts and applications. Numerical Algorithms, 2004, 37: 147 ~ 158.
- 7 邱志平, 顾元宪, 王寿梅. 有界参数结构特征值的上下界定理. 力学学报, 1999, 31(4): 466 ~ 473.
QIU ZhiPing, GU YuanXian, WANG ShouMei. A theorem of upper and lower bounds on eigenvalues for structures with bounded parameters. Acta Mechanica Sinica, 1999, 31(4): 466 ~ 473 (In Chinese).
- 8 郭书祥, 吕震宙. 区间运算和静力区间有限元. 应用数学和力学, 2001, 22(12): 1 249 ~ 1 254.
GUO ShuXiang, LU ZhenZhou. Interval arithmetic and static interval finite element method. Applied Mathematics and Mechanics, 2001, 22(12): 1 249 ~ 1 254 (In Chinese).
- 9 郭书祥, 吕震宙. 结构体系的非概率可靠性分析方法. 计算力学学报, 2002, 19(3): 332 ~ 335.
GUO ShuXiang, LU ZhenZhou. A procedure of the analysis of non-probabilistic reliability of structural systems. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2002, 19(3): 332 ~ 335 (In Chinese).
- 10 王晓军, 邱志平. 结构振动的鲁棒可靠性. 北京航空航天大学学报, 2003, 29(11): 1 006 ~ 1 010.
WANG XiaoJun, QIU ZhiPing. Robust reliability of structural vibration. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2003, 29(11): 1 006 ~ 1 010 (In Chinese).
- 11 Christoph Grimm, Wilhelm Heupke, Klaus Waldschmidt. Analysis of mixed-signal systems with affine arithmetic. IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, 2005, 24(1): 118 ~ 123.
- 12 Vitelli M. Range analysis in electroquasistatic field linear problems. IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation, 2003, 10(1): 155 ~ 167.
- 13 Siome Klein Goldenstein, Christian Vogler, Dimitris Metaxas. Statistical cue integration in DAG deformable models. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2003, 25(7): 801 ~ 813.
- 14 Nicola Femia, Giovanni Spagnuolo. True worst-case circuit tolerance analysis using genetic algorithms and affine arithmetic. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 2000, 47(9): 1 285 ~ 1 296.
- 15 江 涛, 陈建军, 张建国. 非概率可靠性指标的存在性研究及其半解析解法. 中国机械工程, 2005, 16(20): 2 518 ~ 2 522.
JIANG Tao, CHEN JianJun, ZHANG JianGuo. A semi-analytical approach for calculating index of non-probabilistic reliability based on interval analysis. China Mechanical Engineering, 2005, 16(20): 2 518 ~ 2 522 (In Chinese).
- 16 郭书祥, 吕震宙. 基于非概率模型的结构可靠性优化设计. 计算力学学报, 2002, 19(2): 198 ~ 201.
GUO ShuXiang, LU ZhenZhou. Optimization of uncertain structures based on non-probabilistic reliability. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2002, 19(2): 198 ~ 201 (In Chinese).