

退化结构时变可靠度分析

秦 权, 杨小刚

(清华大学 土木工程系, 北京 100084)

摘 要: 退化结构的检修问题都涉及时变结构可靠度的计算。对退化结构的时变可靠度, 抗力必须表为随机过程。该文考虑退化结构功能函数随机过程, 并考虑活载为连续随机过程、Poisson 过程以及 Bernoulli 过程, 由之导出一个时段内的时变可靠度公式。以混凝土碳化引起的主筋锈蚀的公路桥 T 型梁为例, 计算了这 3 种活载过程下的时变可靠度。算例表明, 对相同的初始抗力, 退化结构在设计使用年限的时变可靠度明显低于目标时不变可靠度。用作用和抗力的均值和方差在 t 时刻的瞬时值代入 Cornell 可靠度指标而计算的“时变可靠度指标”不反映可靠度。

关键词: 时变可靠度; 退化结构; 混凝土碳化; 首次超越; 导数过程

中图分类号: TB 114

文献标识码: A

文章编号: 1000-0054(2005)06-0733-04

Time-dependent reliability analysis of deteriorating structures

Q N Quan, YANG Xiaogang

(Department of Civil Engineering, Tsinghua University,
Beijing 100084, China)

Abstract: Inspection and repair of deteriorating structures is scheduled based on assessments of the time-varying structural reliability. The resistance of deteriorating structures is a non-stationary stochastic process. This analysis uses a stochastic analysis of the performance function of deteriorating bridge structures assuming continuous, Poisson, Bernoulli vehicle loading processes to analyze the time-varying reliability. The analysis is based on a T-shape girder of a highway bridge with corroded reinforcement bars due to concrete carbonification. The analysis shows how the time-varying reliability decreases to much lower than the target reliability during the design lifetime and that the Cornell reliability index calculated from values of the mean and the variance of the action effect and resistance at time t does not accurately represent the reliability.

Key words: time-varying reliability; deteriorating structure; concrete carbonification; first excursion; derivative process

近年来, 时变结构可靠度计算日益受到重视。但现行所有结构设计规范都基于时不变结构可靠度理论: 在预定设计使用年限内抗力和作用都处理为随机变量, 于是功能函数也变成随机变量。退化结构的抗力和功能函数是非平稳随机过程, 相应的问题则成为时变可靠度问题。这时, 时间 t 必须作为变量出现。

时变可靠度是个新领域。文[1, 2]把时变可靠度问题变成一系列不同时段的不变极限状态的串连系统可靠度问题。这样做有两个问题, 一是多大的时段长度上限才能保证可靠度计算结果有必要的精度, 二是不知道结构在每个时段的可靠度与结构在整个设计使用年限内的可靠度之间的关系。

文[3, 4]直接用任意时刻 t 的 Cornell 可靠度指标 $\beta(t)$ 。但是, 按随机过程理论, 对一个在 t 时刻安全的结构, 在 $t+0$ 时刻必定是安全的。因此, 该结构在“ t 时刻”的失效概率恒为 0。因此, 根本不存在“时刻 t 的失效概率 $P_F(t)$ ”这个概念。这样, Cornell 可靠度指标 $\beta(t)$ 作为形式上的数学符号虽然存在, 但不具有可靠度指标的含义。

文[5]正确地使用了随机过程跨越率和首次超越概率的概念, 但是在推导跨越率时不使用功能函数, 方法复杂, 因此对最简单的连续功能函数也只给出了原则性的公式, 不能实用。

本文讨论功能函数随机过程, 由之导出一个时段内的时变结构可靠度。

1 功能函数随机过程

1.1 抗力随机过程

退化结构的抗力随机过程记为 $R(t)$ 。至少其均值是随时间递减的, 因此, 退化结构的抗力是非平稳随机过程。一般简化为^[1-3]

收稿日期: 2004-04-23

基金项目: 国家“九七三”重点基础研究项目 (2002CB4127009)

作者简介: 秦权(1939-), 男(汉), 江苏, 教授。

E-mail: qinq@tsinghua.edu.cn

$$R(t) = R_0 g(t). \quad (1)$$

式中: R_0 为初始时刻的抗力随机变量, 其均值 μ_{R_0} , 方差 $\sigma_{R_0}^2$; $g(t)$ 为抗力退化和修理导致抗力恢复的随机过程。为简化, 以其均值近似。此时 $g(t)$ 是确定函数, 当不修理时, 它是从 1 开始单调递降的。这里考虑我国常见的由混凝土碳化引起的混凝土矩形梁退化。混凝土碳化导致钢筋锈蚀引起的钢筋面积的减小过程为^[6]:

$$A_g(t) = \begin{cases} A_{g0}, & t \leq t_i; \\ A_{g0} \left[1 - \frac{\lambda}{r_0} (t - t_i) \right]^2, & t > t_i \end{cases}$$

式中: A_{g0} 为钢筋初始断面积, λ 为钢筋锈蚀速度, r_0 为钢筋初始半径, t_i 为锈蚀开始时刻。

对碳化锈蚀引起的矩形截面混凝土梁弯矩抗力退化过程(仅考虑一阶项), 式(1)中的量为^[7]:

$$R_0 = R_g A_{g0} \left(h_0 - \frac{R_g A_{g0}}{2R_a b} \right).$$

$$g(t) = \begin{cases} 1, & t \leq t_i; \\ 1 - \frac{2\lambda(t - t_i)}{r_0}, & t > t_i \end{cases}$$

式中: R_g 为主筋抗拉强度, R_a 为混凝土立方抗压强度, h_0 为主筋重心距受压边距离, b 为截面宽度。

考虑修理时, 可近似表为“抗力立刻提高”, 此时一般假定每次修理均使抗力恢复到初始值, $g(t)$ 垂直上升到 1, $R(t) = R_0$, 见图 1。

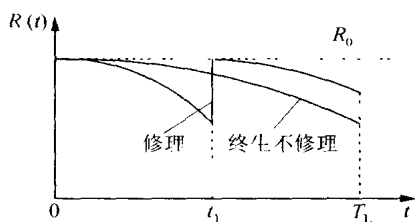


图 1 抗力退化函数 $R(t)$ 的两个情况

1.2 作用效应随机过程

恒载为随机变量, 故其效应 S_D 也是随机变量, 均值为 μ_D , 方差为 σ_D^2 , 分布密度函数为 f_{S_D} 。本文分别用连续过程, Poisson 过程和 Bernoulli 过程表示活载效应 $S_L(t)$, 在设计使用年限内此效应的最大值的均值 μ_L , 方差 σ_L^2 , 年最大值的均值 μ_{Ly} , 方差 σ_{Ly}^2 , 各年最大值独立同分布, 分布函数为 F_{S_L} , Poisson 到达率为 λ 。

总作用效应为 $S(t) = S_L(t) + S_D$, 其中 $S_L(t)$ 、 S_D 和 $R(t)$ 间彼此独立。在设计使用年限 T_L 内 S_D 和 $S_L(t)$ 的一个实现示于图 2。

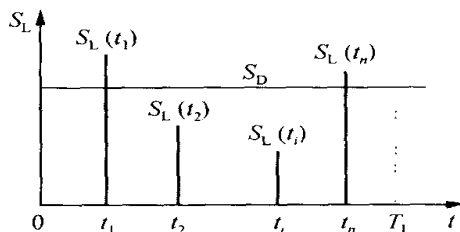


图 2 恒载随机变量和活载 Poisson 过程

2 终生不修理的退化结构的时变可靠度计算

2.1 活载为连续过程

为简单起见, 考虑总作用效应 $S(t)$ 的最简单线性形式的功能函数

$$G(t) = R_0 g(t) - S(t).$$

它是非平稳随机过程。其均值和方差分别为:

$$\mu_G(t) = \mu_{R_0} g(t) - \mu_S,$$

$$\sigma_G^2(t) = \sigma_{R_0}^2 g(t)^2 + \sigma_S^2$$

功能函数的导数过程

$$\frac{dG(t)}{dt} = \dot{G}(t) = R_0 \frac{dg(t)}{dt} - \frac{dS(t)}{dt} = R_0 \dot{g}(t) - \dot{S}(t).$$

式中 $\dot{S}(t)$ 是 $S(t)$ 的导数过程, 也是平稳过程。其均值和方差分别为:

$$\mu_{\dot{S}} = 0, \quad \sigma_{\dot{S}}^2 = -d^2 R_S(\tau)/d\tau^2 \Big|_{\tau=0}$$

式中 $R_S(\tau)$ 是平稳过程 $S(t)$ 的自相关函数。 $\dot{G}(t)$ 的均值和方差分别为:

$$\mu_{\dot{G}}(t) = \mu_{R_0} \dot{g}(t) - \mu_{\dot{S}} = \mu_{R_0} \dot{g}(t),$$

$$\sigma_{\dot{G}}^2(t) = \sigma_{R_0}^2 \dot{g}(t)^2 + \sigma_{\dot{S}}^2$$

平稳过程 $S(t)$ 和 $\dot{S}(t)$ 的互相关函数

$$R_{S\dot{S}}(t_1, t_2) = R_{S\dot{S}}(t_2 - t_1) = R_{S\dot{S}}(\tau) = 0$$

非平稳过程 $G(t)$ 和 $\dot{G}(t)$ 的相关系数为

$$\rho(t) = \frac{g(t) \dot{g}(t) \sigma_{R_0}^2}{\sqrt{[\sigma_{R_0}^2 g(t)^2 + \sigma_S^2][\sigma_{R_0}^2 \dot{g}(t)^2 + \sigma_{\dot{S}}^2]}}. \quad (2)$$

式中涉及车载弯矩的导数过程 $\dot{S}_L(t)$ 。即使仅考虑设计使用年限内最大集中车载引起的跨中弯矩, 集中力作用点处弯矩的导数也是不连续的。如果考虑设计使用年限内最大集中车载 P 的弯矩影响线在简支梁跨中的值, 假定车以匀速 v 前进则有:

$$S_L(t) = P v t (l - v t) / l,$$

$$\dot{S}_L(t) = P v (l - 2 v t) / l$$

可知在跨中 $\dot{S}_L(t)$ 恒为 0。因此有 $\sigma_{\dot{S}_L}^2 = 0$ 。考虑到

退化结构 $\dot{g}(t)$ 总为负, 式(2)退化为

$$\rho(t) = \frac{-\sigma_{R_0} g(t)}{\sqrt{[\sigma_{R_0}^2 g(t)^2 + \sigma_S^2]}}$$

以随机过程表示的极限状态方程为 $G(t) = 0$, 安全域为 $G(t) > 0$. 此时, 功能函数的极限状态跨越问题是对常数 0 的负跨越. 按照 Rice 公式, 随机过程 $G(t)$ 的极限状态跨越率为

$$\dot{v}_0(t) = - \int_{-\infty}^0 \dot{G}(t) p_{\dot{G}\dot{G}}[0, \dot{G}(t)] d\dot{G}(t). \quad (3)$$

式中 $p_{\dot{G}\dot{G}}$ 为 $G(t)$ 和 $\dot{G}(t)$ 的联合概率密度. 式(3)表明极限状态跨越率是时间的函数, 时变结构可靠度不仅与 $G(t)$ 有关, 且与其导数过程 $\dot{G}(t)$ 也有关.

若 R_0 和 $S(t)$ 都是正态的, 则功能函数 $G(t)$ 也是正态的. 此时, 可对式(3)求积得

$$\dot{v}_0 = \frac{\sigma_G(t)}{2\pi\sigma_G(t)} \left\{ \sqrt{1 - \rho(t)^2} \exp \left[- \frac{\sigma_{R_0}^2 \mu_S^2 + \mu_{R_0}^2 \sigma_S^2}{2\sigma_{R_0}^2 \sigma_S^2} \right] + \sqrt{2\pi} [\rho(t) \beta(t) - \beta_G(t)] \cdot \exp \left[- \frac{\beta(t)^2}{2} \right] \Phi \left[\frac{\rho(t) \beta(t) - \beta_G(t)}{\sqrt{1 - \rho(t)^2}} \right] \right\}. \quad (4)$$

式中:

$$\begin{aligned} \beta(t) &\equiv \beta_G(t) = \frac{\mu_{R_0} g(t) - \mu_S}{\sqrt{\sigma_{R_0}^2 g(t)^2 + \sigma_S^2}}, \\ \beta_G(t) &= \frac{\mu_{R_0} \dot{g}(t)}{\sqrt{\sigma_{R_0}^2 \dot{g}(t)^2 + \sigma_S^2}} = - \frac{\mu_{R_0}}{\sigma_{R_0}}. \end{aligned} \quad (5)$$

式(4)表明跨越率 $\dot{v}_0(t)$ 是 $g(t)$ 和 $\dot{g}(t)$ 的函数. 可见, 即使对正态功能函数, 跨越率也没有解析解. 应当注意: 这里记号 $\beta(t)$ 形式上虽与 Cornell 可靠度指标相同, 但并非可靠度指标.

对承载能力极限状态, 失效概率在 10^{-4} 量级, 因此, 可以用 Poisson 过程描写时变结构的失效过程. Poisson 到达率为 $\dot{v}_0(t)$. 由于 $\dot{v}_0(t)$ 与 t 有关, 时变结构的失效过程是非均匀 Poisson 过程. 在 $[0, T]$ 期间时变可靠度 P_R 等于在 $[0, T]$ 不出现首次超越的概率, 即

$$P_R = P_N(0, T) = \exp \left[- \int_0^T \dot{v}_0(t) dt \right]. \quad (6)$$

对 $T = T_L$, 式(6)表示不修理的退化结构一生的可靠度. 由于 $\dot{v}_0(t)$ 不负, 所以随着 T 增大, P_R 降低.

2.2 活载为 Poisson 过程

对终生不修理的退化结构的线性功能函数

$$G(t) = R_0 g(t) - S_L(t) - S_D. \quad (7)$$

考虑 3 个条件: 在 T_L 时期内 S_L 到达 n 次, 到达时刻分别为 $t_1, t_2, \dots, t_n$; R_0 的一个抽样为 r ; S_D 的一个抽样为 s_D . 则在任意时间段 $[0, T_L]$ 梁在上述 3 条件下的条件时变可靠度为

$$P_R(T | n, r, s_D) = \prod_{i=1}^n F_{S_L}(rg(t_i) - s_D).$$

再假定 n 个 Poisson 时间点 t_i 在 $[0, T]$ 内均布, 且彼此独立. 考虑 n 的所有可能, 并由条件概率求全概率, 可得梁在一个时期 $[0, T]$ 内的不修理的退化结构的时变可靠度近似为

$$P_R(T) = \int_{R_0} f_{R_0}(r) dr \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda T s_D} f_{S_D}(s_D) ds_D. \quad (8)$$

式中

$$T_S = T - \int_0^T F_{S_L}[rg(t) - s_D] dt$$

随着 T 增大, P_R 降低. 当 $T = T_L$ 时 P_R 即为设计使用年限内的可靠度.

取安全等级二级的延性结构的(时不变)目标可靠度指标 $\beta_T = 4.2$. 由年最大活载 S_L 可以计算出 T_L 期间的最大活载 S_{LTL} . 由时不变功能函数 $G(t) = R_0 - S_{LTL} - S_D$, 通过 FORM 方法可得时不变结构的可靠度指标 β 和广义失效概率 P_{F0} .

由式(8)确定 μ_{R_0} 相当于按时变结构可靠度设计一个结构, 使之在 T_L 内具有同于现行设计规范的可靠度. 由这个 μ_{R_0} 可以确定 $\beta(t)$, 这就给出了目标可靠度与形式上的 Cornell 可靠度指标 $\beta(t)$ 间的关系.

2.3 活载为 Bernoulli 过程

此时, 退化梁在时期 $[0, T]$ 内的不修理的时变可靠度变为

$$P_R(T) = \int_{R_0} f_{R_0}(r) dr \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^N C_N^n p^n (1-p)^{N-n} \cdot \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T F_{S_L}[rg(t) - s_D] dt \right\}^n f_{S_D}(s_D) ds_D. \quad (9)$$

式中: C_N^n 是二项式系数, p 为活载的年发生概率.

3 算例

京密公路白河桥建于 1966 年, 为钢筋混凝土简支 T 型梁桥, 共有 6 跨, 每跨计算跨径 15m, 每跨有 6 根 T 型梁. 考虑中部的一根梁. 图 3 为 T 型梁跨中截面. 混凝土 25 号, 立方强度标准值 $R_{ak} = 17.5 \text{ MPa}$. 考虑公路 B 级汽车荷载^[8]. 此时可不考虑人群荷载. 考虑功能函数公式(7).

恒载为正态分布, 均值系数 $\kappa_G = 1.0148$, 变异系数 $\delta_G = 0.0431$, 恒载跨中弯矩的均值 μ_D 和标准差 σ 分别为 357.1 kNm、15.39 kNm. 设计使用年限 $T_L = 100 \text{ a}$ 内最大汽车荷载为极值 I 型分布, 均值

系数 $\kappa = 0.6861$, 变异系数 $\delta = 0.1569$ 。梁跨中考考虑冲击系数的活载弯矩的均值 $\mu_{L,TL}$ 和标准差 $\sigma_{L,TL}$ 分别为 434.2 kNm、68.12 kNm, 年均最大汽车荷载弯矩 $\mu_{L,y} = 189.61$ kNm。

截面弯曲抗力 R_0 为对数正态分布, 均值系数 $\kappa_{R0} = 1.2262$, 变异系数 $\delta_{R0} = 0.1414$ 。当配 5 号钢筋, 截面积 $A_g = 76.23 \text{ cm}^2$ 时, 截面弯曲抗力标准值为 $R_k = 1.389 \text{ MNm}$ 。因而初始时梁抗力的均值 μ_{R0} 和标准差 σ_{R0} 分别为 1.703 MNm、240.8 kNm。梁的时不变目标可靠度指标 $\beta_T = 4.2$, T_L 内的时不变可靠度 = 0.999 987。

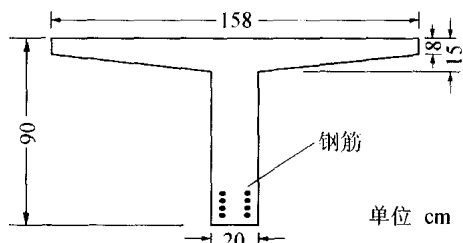


图3 京密公路白河桥 T 形梁跨中截面

活载分布函数为

$$F_{S_L}(x) = \exp \left[- \exp \left(- \frac{x-u}{a} \right) \right],$$

这里: $u = 158.95 \text{ kNm}$, $a = 53.11 \text{ kNm}$ 。取保护层厚 $c = 30 \text{ mm}$, 主筋直径 30 mm。平均温度 20℃, 北京地区年平均相对湿度 $H = 59\%$ 。由相关公式计算出弯矩抗力的退化规律为^[6]:

$$g(t) = \begin{cases} 1, & t \leq t_i \\ 1 - 9.23 \times 10^{-4}(t - t_i)/a, & t > t_i \end{cases}$$

分别对式(6)的连续过程、式(8)的 Poisson 过程($\lambda = 1$)、和式(9)的 Bernoulli 过程活载计算时变可靠度 P_R 对应的广义可靠度指标 β_G 。结果示于图 4 和表 1。图 4 表明: 随着时间增加, 退化梁的可靠度逐渐下降, 前几十 a 高于现行规范的目标可靠度 β_T , 下降至低于 β_T 。图 4 还给出了连续活载下式(5)的形式 Cornell 可靠度指标 $\beta(t) = 3.41$, 它显著低于时变的广义可靠度指标。表 1 给出为使 T_L 内退化结构的可靠度等于 β_T , 3 种活载过程下抗力应有的初始均值 μ_{R0} 。它们都大于不退化的 1.703 MNm。可见这个 $\beta(t)$ 不是可靠度指标, 不能用来控制退化结构的可靠度。图 4 和表 1 表明: 到 T_L 时退化梁的可靠度明显低于 $\beta_T = 4.2$ 。由于式(6)不得不假定活载和抗力都有正态分布, 因此连续活载过程的时变可靠度低于两个离散过程, 且这两个离散过程导致相同的时变可靠度。

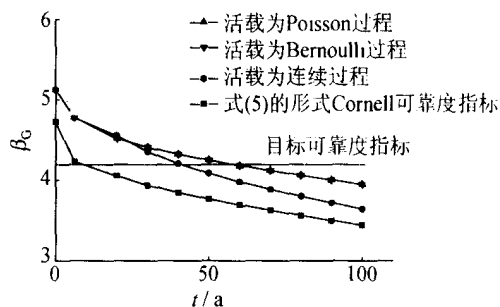


图4 3种活载随机过程下 T 型梁广义可靠度指标

表1 3种活载过程下 T 梁在 T_L 时刻的时变可靠度结果

活载过程	P_R	P_F	β_G	μ_{R0}/MNm
连续	0.999 674	0.000 326	3.647	2.023
Poisson	0.999 961	0.000 039	3.953	1.793
Bernoulli	0.999 961	0.000 039	3.953	1.793

4 结 论

算例表明: 按时不变目标可靠度指标设计的梁退化结构的时变可靠度先高于设计规范规定的目标可靠度, 然后逐渐降低, 到设计使用年限时显著低于目标可靠度; 还显示了“时变可靠度指标”与广义可靠度指标的明显差异。

参考文献 (References)

- [1] Mori Y, Ellingwood B R. Reliability-based service-life assessment of aging concrete structures [J]. *J Struct Eng*, 1993, **119**(5): 1600~1621.
 - [2] Mori Y, Ellingwood B R. Maintaining reliability of concrete structures, I. Role of inspection/repair [J]. *J Struct Eng*, 1994, **120**(3): 824~845.
 - [3] Sommer A M, Nowak A S, Thoft-Christensen P. Probability-based bridge inspection strategy [J]. *J Struct Eng*, 1993, **119**(12): 3520~3536.
 - [4] Frangopol D M, Lin K-Y, Estes A C. Reliability of reinforced concrete girders under corrosion attack [J]. *J Struct Eng*, 1997, **123**(3): 286~297.
 - [5] Melchers R E. Structural Reliability Analysis and Prediction (2nd Ed) [M]. Chichester, John Wiley & Sons, 1999.
 - [6] 牛荪涛. 混凝土结构耐久性与寿命预测 [M]. 北京: 科学出版社, 2003.
 - [7] NU D itao. Durability And Life Forecast of Reinforced Concrete Structure [M]. Beijing: Science Press NC, 1994 (in Chinese).
 - [8] 交通部 (JTJ 023-85). 公路钢筋混凝土及预应力混凝土桥涵设计规范 [S]. 北京: 人民交通出版社, 1985.
- China Ministry of Communications (JTJ 023-85). Specifications for Design of Highway Reinforced and Pre-Stressed Concrete Bridges [S]. Beijing: China Communications Press, 1985 (in Chinese).
- 交通部. 公路桥涵设计通用规范(征求意见稿) [S]. 北京: 人民交通出版社, 2001.
- China Ministry of Communications. General Specifications for Design of Highway Engineering (Final draft) [S]. Beijing: China Communications Press, 2001 (in Chinese).