

文章编号: 1001-0645(2000)02-0145-05

③
145-149
若干共因失效基本模型的分析

董秀媛, 宋好卫, 田煜斌

(北京理工大学 应用数学系, 北京 100081)

0213.2
TM623.8

摘 要: 在给出了 β 因子法、BFR 模型、BP 模型和 MGL 模型参数的极大似然估计后, 利用蒙特卡罗方法模拟失效数据对共因失效分析中的几个基本模型进行分析比较. β 因子法严重高估失效率, 可用于失效率的预估, 而 BFR 模型、BP 模型、MGL 模型则给出比较精确的估计.

关键词: 共因失效分析; 二项失效率模型; 基本参数模型; 多希腊字母模型; β 因子法; 蒙特卡罗模拟

中图分类号: O 213.2; O 242.1

文献标识码: A

核电厂 安全评估

从核电厂的概率安全评估中可以看到, 由共因造成的多元件失效是核电厂中冗余系统不可用的主要原因之一. 因此, 许多国家在一些复杂系统的可靠性研究中都进行了共因失效分析. 为此, 从本世纪 70 年代到现在, 分析人员提出了许多模型和方法. 这些模型和方法中有简单的单参数模型, 如: β 因子法; 也有复杂的多参数模型, 如: 二项失效率(BFR)模型、基本参数(BP)模型和多希腊字母(MGL)模型^[1~4]. 这些模型和方法简单易于操作, 所以至今仍被应用于共因失效分析研究中, 并常被简称为共因失效分析中的几个基本模型. 这些模型拥有各自不同的参数, 表 1 中给出了它们各自相应的参数. 虽然这些模型现在应用较为广泛, 但关于它们参数间关系和适用范围的研究还比较少. 本文将在一般性 Poisson 模型的假设下给出 BFR 模型参数的极大似然估计, 并利用蒙特卡罗模拟的方法对这些基本模型进行了分析比较.

表 1 几个基本模型及其参数^[5]

性 质	模 型	参 数
单参数	β 因子法	β
	BP 模型	$Q_1, Q_2, \dots, Q_M$
多参数	MGL 模型	$\lambda, \beta, \gamma, \dots (M \text{ 个参数})$
	BFR 模型	λ, p, μ, ω

1 基本模型参数的 MLE 估计

这些基本模型都源于一般性 Poisson 模型. 若考虑的系统由 M 个相同元件组成, 该 Poisson 模型一般采用如下的假设:

- ① 系统中的每个元件在无共因发生的情况下, 其寿命都独立同分布且服从指数分布.
- ② 系统受到共因冲击而使 k 个元件同时失效的事件若简记为 E_k , 则 E_k 发生的时间间隔

收稿日期: 1999-04-26

基金项目: 部级预研项目

作者简介: 董秀媛, 女, 1940 年生, 教授.

独立同分布且服从指数分布($k=1,2,\dots,M$).

③ 导致 $E_1, E_2, \dots, E_M$ 发生的共因冲击之间相互独立, 且与独立失效间也独立.

④ 系统中的各种失效都被发现并立刻维修, 维修的时间忽略不计.

由上面的一般性假设, 得到如下的引理.

引理 1^[6] 如果系统总运行时间为 T , 且设 N_k 为时间 T 内 k 个元件同时失效的次数, λ_k 为 k 个元件同时失效的失效率, 则 N_k 服从于参数为 $\lambda_k T$ 的 Poisson 分布, 即 $N_k \sim \pi(\lambda_k T)$ ($k=1, 2, \dots, M$).

由引理 1 易得 BP 模型、MGL 模型、 β 因子法和 BFR 模型的参数估计.

引理 2^[5] 在一般性 Poisson 模型假设下, BP 模型参数的 MLE 估计为: $\hat{Q}_k = n_k / \binom{M}{k} n$,

$k=1, 2, \dots, M$. 其中 n_k 为观察到的 k 个元件同时性失效的次数, $n = \sum_{j=1}^M n_j$.

引理 3^[5] 在一般性 Poisson 模型假设下, MGL 模型参数的 MLE 估计为

$$\hat{\lambda} = \sum_{j=1}^M j n_j / M n, \hat{\beta} = \sum_{j=2}^M j n_j / \sum_{j=1}^M j n_j, \hat{\gamma} = \sum_{j=3}^M j n_j / \sum_{j=2}^M j n_j, \dots$$

引理 4^[5] 在一般性 Poisson 模型的假设下, β 因子法参数的 MLE 估计为

$$\hat{\beta} = \sum_{j=2}^M j n_j / \sum_{j=1}^M j n_j$$

定理 1 在一般性 Poisson 模型的假设下, BFR 模型的参数估计分为以下两种情况:

① 当潜在共因失效不被识别时(这时的参数估计可以简记为 BFRLS 估计), 参数的 MLE 估计为 $\hat{\lambda} = \frac{n_1 - \hat{\mu} M \hat{p} (1 - \hat{p})^{M-1} T}{MT}$, $\hat{\mu} = \frac{n_+ / T}{1 - (1 - \hat{p})^M - M \hat{p} (1 - \hat{p})^{M-1}}$, $\hat{p}$ 满足方程 $[1 - (1 - \hat{p})^M - M \hat{p} (1 - \hat{p})^{M-1}] s = M \hat{p} n_+ (1 - (1 - \hat{p})^{M-1})$, $\hat{\omega} = n_L / T$. 其中 $s = \sum_{i=2}^M i n_i$; $n_+ = \sum_{j=2}^M n_j$; n_L 为观察到的单元件失效的次数和致命冲击引起的失效次数.

② 当潜在共因失效被识别时(这时的参数估计可以简记为 BFRSFLS 估计), 参数的 MLE 估计为 $\hat{\lambda} = n_I / MT$, $\hat{\mu} = \frac{n_+ / T}{1 - (1 - \hat{p})^M}$, $\hat{p}$ 满足方程 $[1 - (1 - \hat{p})^M] s = M \hat{p} n_+$, $\hat{\omega} = n_L / T$. 其中 $s = \sum_{i=2}^M i n_i + n_C$; $n_+ = \sum_{j=2}^M n_j + n_C$; n_I 和 n_C 为观察到的独立失效的次数和潜在共因失效的次数.

证明 先证明当潜在共因失效不被识别时的情况. 为了证明方便, 引进 λ_+ 和 N_+ (可视性共因失效率和可视性共因失效数), 其定义为 $\lambda_+ = \sum_{i=2}^M \lambda_i$, $N_+ = \sum_{i=2}^M N_i$. 由引理 1 可得参数 λ_1 , λ_+ , p 和 ω 的似然函数为

$$\begin{aligned} L = & P[N_1 = n_1, \dots, N_M = n_M, N_L = n_L] = \\ & P[N_1 = n_1] P[N_+ = n_+] P[N_L = n_L] P[N_2 = n_2, \dots, N_M = n_M | N_+ = n_+] = \\ & L_1 \times L_2 \times L_3 \times L_4, \end{aligned}$$

其中 $N_1 \sim \pi(\lambda_1 T)$; $N_+ \sim \pi(\lambda_+ T)$; $N_L \sim \pi(\omega T)$; 在 $N_+ = n_+$ 的条件下, $(N_2, \dots, N_M)$ 服从于多项分布 $M(n_+, x_2, \dots, x_M)$. 这里的 $x_i = r_i / (1 - r_0 - r_1)$, 而 $r_i = C_M p^i q^{M-i}$ ($i=1, \dots, M$).

由多项分布的密度函数可知:

$$L_4 = P[N_2=n_2, N_3=n_3, \dots, N_M=n_M | N_+=n_+] = \frac{n_+!}{n_2! \dots n_M!} \prod_{i=2}^M z_i^{n_i} =$$

$$\frac{n_+!}{n_2! \dots n_M!} \prod_{i=2}^M \left(\frac{r_i}{1-r_0-r_1} \right)^{n_i} = \frac{n_+!}{n_2! \dots n_M!} \frac{p^s q^{Mn_+-s}}{(1-q^M - Mpq^{M-1})^{n_+}} \prod_{i=2}^M \binom{M}{i}^{n_i},$$

$$\text{其中 } s = \sum_{i=2}^M in_i.$$

由参数的似然函数 L 可得 $\lambda_1, \lambda_+, \omega$ 的极大似然估计为 $\hat{\lambda}_1 = n_1/T, \hat{\lambda}_+ = n_+/T, \hat{\omega} = n_L/T$.
用同样的方法可得 p 的极大似然估计:

$$\frac{\partial \ln L_4}{\partial p} = \frac{s}{p} - \frac{Mn_+-s}{q} - n_+ \frac{1}{1-q^M - Mpq^{M-1}} (Mq^{M-1} - Mq^{M-1} + Mp(M-1)q^{M-1}) =$$

$$\frac{s - Mn_+p}{pq} - n_+ \frac{Mp(M-1)q^{M-2}}{1-q^M - Mpq^{M-1}} = \frac{s}{pq} - \frac{Mn_+}{q} - \frac{n_+Mp(M-1)q^{M-2}}{1-q^M - Mpq^{M-1}} =$$

$$\frac{s}{pq} - Mn_+ \frac{1-q^M - Mpq^{M-1} + p(M-1)q^{M-1}}{q(1-q^M - Mpq^{M-1})} = \frac{s}{pq} - Mn_+ \frac{1-q^{M-1}}{q(1-q^M - Mpq^{M-1})}.$$

令 $(\partial \ln L_4)/\partial p$ 为 0, 可知 p 的极大似然估计 $\hat{p}$ 为下式的唯一解: $s = Mn_+p \frac{1-q^{M-1}}{1-q^M - Mpq^{M-1}}$.

得到参数 $\lambda_1, \lambda_+, \omega$ 和 p 的极大似然估计后, 可以用简单的计算得到参数 μ, λ 的极大似然

$$\text{估计, } \hat{\mu} = \frac{\hat{\lambda}_+}{(1-(1-\hat{p})^M - M\hat{p}(1-\hat{p})^{M-1})}, \hat{\lambda} = \frac{\hat{\lambda}_1 - \hat{\mu}M\hat{p}(1-\hat{p})^{M-1}}{M}.$$

对于当潜在共因失效被识别时的情况可以类似证之. 证毕.

2 基本模型的 Monte Carlo 模拟比较

有了各模型参数的估计方法后, 并利用收集到的失效数据, 可以解决许多共因失效方面的估计问题, 并由此了解这些基本模型的适用性, 验证它们的优劣性. 在现实中可获得的失效数据极少. 因此, 可采用蒙特卡罗方法模拟失效数据进行分析.

本文利用 BFR 模型的参数进行蒙特卡罗模拟. 所考虑的系统中包含 3~9 个元件. 参考核电厂的运行数据, 对于参数 λ (独立失效率), 选取的值为 10^{-3} 和 10^{-4} ; 参数 μ (非致命冲击的发生率), 选取 10^{-4} ; 参数 p (非致命冲击发生时, 元件的失效概率), 选取 5 个值: 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9; 致命冲击率 ω , 选取 2 个值为 10^{-5} 和 10^{-6} ; 系统总的运行时间为 T , 选为 10^5 和 10^6 . 对于每个 M 及每种参数的组合, 都用蒙特卡罗方法重复模拟 1 000 次, 从而产生出各种情形下的失效数据.

把这些失效数据用于各种基本模型中, 可以得到它们的参数估计值及系统中 k 个元件同时失效的概率值 ($k=1, \dots, M$). 通过对这些值分析研究后发现:

① β 因子法除了对单元件失效 ($k=1$) 和所有元件同时性失效 ($k=M$) 的概率有较精确的估计外, 对其它 k 个元件同时性失效 ($k=2, \dots, M-1$) 的概率的估计, 则出现明显高估的现象. 这正可以作为 β 因子法定义本身所具有的缺陷的一个佐证. 虽然这样的 β 因子法本身具有很大的缺陷, 但仍可使用, 主要是由于其十分简单, 不过只可作为失效率的一种预估来用. 表 2 给出了 $M=4, \lambda=10^{-4}, \mu=10^{-4}, p=0.1, \omega=10^{-5}, t=10^5$ 时, β 因子法参数估计的情况.

② BFR 模型能很好地得到各种估计, 特别是在估计一些小的概率事件时, BFR 模型的优

势就更加明显了. 而此时, BP 模型和 MGL 模型会得到零估计, 从而极大地低估这些小事件的概率. 但有时失效数据是不适合 BFR 模型的, 这时若仍用 BFR 模型估计就会出现较严重的偏差. 此时, 可以用 BP 模型和 MGL 模型. 低估偏差都是在允许范围内的, 并且 BP 模型还可以比较容易地推广到含不同元件数的系统中去. MGL 模型由于其参数定义的复杂性, 在这方面有一定的困难. 表 3 给出了 BFR, BP, MGL 模型参数估计时方差的比较. ($M=5, \lambda=10^{-4}, \mu=10^{-4}, p=0.1, \omega=10^{-5}, t=10^5$)

表 2 β 因子法参数估计与真值的比较

k	β 因子法的估计值	参数真值
1	1.0464×10^{-4}	1.0729×10^{-4}
2	1.7631×10^{-5}	8.1000×10^{-7}
3	1.7631×10^{-5}	9.0000×10^{-8}
4	1.7631×10^{-5}	1.0010×10^{-5}

表 3 BFR, BP, MGL 模型参数估计时方差的比较

k	BFR 模型	BP 模型	MGL 模型
1	8.6790×10^{-9}	3.1950×10^{-8}	3.1950×10^{-8}
2	7.6670×10^{-4}	4.7620×10^{-2}	1.3910×10^{-2}
3	8.7990×10^{-4}	5.8380×10^{-3}	2.9740×10^{-3}
4	1.1100×10^{-3}	2.5230×10^{-3}	1.9150×10^{-3}
5	1.7190×10^{-2}	1.7390×10^{-2}	1.7390×10^{-3}

③ 从对 BFR 模型估计的结果分析发现, 参数 p 与元件数 M 有以下的关系: 当其它参数 (λ, μ, ω 和 T) 的真值固定并取 $p=0.1$ 时, 随着 M 的增大 (从 3→9), p 的估计越来越精确. 在 BFRLS 估计中, p 的估计值从 0.75 降到 0.27; 在 BFRSFLS 估计中, p 的估计值从 0.316 降到 0.113. (在不识别潜在共因失效的情况下使用 BFR 模型, 简记为 BFRLS 估计; 在识别潜在共因失效的情况下使用 BFR 模型, 简记为 BFRSFLS 估计.) 表 4 中给出了 M 变化和 BFR 模型对参数 p 估计的情况. 参数 λ, μ, ω 随 M 变化而变化的趋势不明显, 但总地说来, BFRSFLS 估计比 BFRLS 估计在对参数 p, μ 的估计中更精确, 而两者对 λ, ω 的估计差别不十分明显.

④ 用 BFR 模型进行估计, 表 5 中给出了 p 变化时, BFR 模型对它估计的情况. 在观察参数 p 真值变化时对估计结果的影响情况中发现: 当其它参数 (λ, μ, ω 和 T) 的真值不变并取 $M=3$ 时, 随着参数 p 真值逐渐增大, BFRSFLS 和 BFRLS 对参数 p 和 μ 的估计逐渐精确, 但对 λ, ω 的估计的影响不大, 不过它们仍有向估计精确发展的趋势. 然而当参数 p 真值趋于 1 时, 所有估计的偏差反而加大了.

表 4 M 变化时 BFR 模型对参数 p 估计的情况 (其它参数固定)

M	$\hat{p}$	$\hat{p}^*$	p 的真值
3	0.7500	0.3168	0.1
4	0.4944	0.2355	0.1
5	0.3887	0.1976	0.1
6	0.3373	0.1524	0.1
7	0.2618	0.1274	0.1
8	0.2984	0.1155	0.1
9	0.2734	0.1132	0.1

$\hat{p}$ 为用 BFR 模型得到的 BFRLS 估计; $\hat{p}^*$ 为 BFRSFLS 估计

表 5 p 变化时 BFR 模型对 p 估计的情况 ($M=3$)

P 的真值	$\hat{p}$	偏差 ($\hat{p}-p$)	$\hat{p}^*$	偏差 ($\hat{p}^*-p$)
0.1	0.7500	0.6500	0.3167	0.2167
0.2	0.7055	0.5055	0.3386	0.1386
0.3	0.7027	0.4027	0.3840	0.0840
0.4	0.6971	0.2971	0.4781	0.0781
0.5	0.7377	0.2377	0.6258	0.1258
0.7	0.8777	0.1777	0.8651	0.1651
0.8	0.9219	0.1219	0.9195	0.1195

3 结 论

本文利用蒙特卡罗模拟失效数据,并用这些数据对几个共因失效分析中的基本模型进行了分析比较。 β 因子法需要最少的数据信息并给出了保守的估计,它可以被用在 PRA 中进行预估。当需要更精确的估计并且数据信息充足时,则可以使用 BFR 模型、BP 模型和 MGL 模型。当然,尽可能深入地了解失效数据的属性,对共因失效分析是有好处的。目前国内对复杂系统的共因失效数据记录极少,这阻碍了共因失效研究的进一步发展。

参考文献:

- [1] Fleming K N. A reliability model for common cause failures in redundant safety systems[Z]. Sixth annual pittsburgh conference on modeling and simulation, Pittsburgh, 1975.
- [2] Atwood C L. The binomial failure rate common cause model[J]. Technometrics, 1986, 28 (2):139~148.
- [3] Fleming K N, Mosleh A. Classification and analysis of reactor operating experience involving dependent events[R]. California: Pickard, Lowe and Garrick, Inc., PLG-0400, 1985.
- [4] Fleming K N, Kalinowski A M. An extension of the beta factor method to systems with high levels of redundancy[R]. California: Pickard, Lowe and Garrick, Inc., PLG-0289, 1983.
- [5] Mosleh A, Fleming K N, Parry G W, et al. Procedures for treating common cause failures in safety and reliability study[R]. California: NUREG/CR, 4780, 1988.
- [6] Elizabeth J K, GERALYN M H. Estimation techniques for common cause failure events[R]. California: NUREG/CR, 5044, 1988.

Analysis of the Basic Models for Common Cause Failure

DONG Xiu-yuan, SONG Hao-wei, TIAN Yu-bin

(Department of Applied Mathematics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081)

Abstract: To analyse and compare the basic models of common cause failure, the MLEs of the β -factor, basic parameter model, binomial failure rate model, multiple Greek letter model were given and the Monte Carlo simulation were used for failure data. The β -factor technique was shown to be conservative. Models of BFR, BP, MGL are better when data is sufficient.

Key words: analysis of common cause failure; binomial failure rate model; basic parameter model; multiple Greek letter model; β -factor technique; Monte Carlo simulation