

和联系统可靠性数学模型的证明

范 敏

中国船舶重工集团公司 701 研究所

摘要

本文介绍了和联系统概念及可靠性模型，给出了和联可靠性模型应用例子的特例证明和一般式的证明。

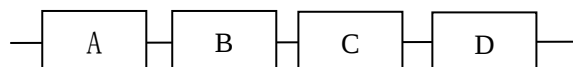
关键词：和联系统 和联模型 应用 数学模型证明

1. 和联模型应用问题的提出

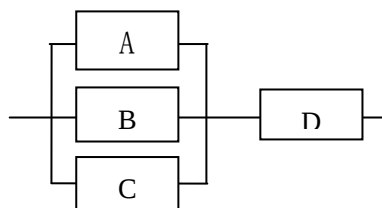
假设一个电话系统由 A、B、C 三部安装于不同部位的电话机和 1 部交换机 D 组成，并且 A、B、C 三部电话机的使用重要性不同。如何建立该电话系统的可靠性模型？

按照经典的可靠性理论，只能采用并联、串联或其组合的可靠性结构来建立该系统的可靠性模型。对上述系统便有以下两种建模的可能：

1)、串联模型



2)、串并联模型



与上述可靠性模型相对应的该系统任务成功准则：

- 串联模型的任务成功准则——在任务期间，电话系统中的三部电话（A、B、C）以及交换机（D）任何一个都不发生失效，视为任务成功。
- 串并联模型的任务成功准则——在任务期间，电话系统中的三部电话（A、B、C）中只要有一部不发生失效，并且交换机（D）不发生失效视为任务成功。

以上两种模型以不同的方式在一定程度上描述了该电话系统的可靠性。但存在以下两个的疑问。

1) 对于串联模型的疑问

当电话系统中重要程度最低的电话 C 失效时，重要度最高的和次最高的电话 A 和 B 并未失效，因此主要通信通道并未丧失功能，难道系统任务也算作失败吗？

2) 对于串并联模型的疑问

当电话系统中重要度最高的和次最高的电话 A 和 B 都失效，仅重要程度最低的电话 C 未失效时，系统的主要通信通道都已丧失功能，难道系统任务也算作成功吗？

有许多类似系统的实际使用过程能够证明以上所提出的两个疑问是合理的。采用以上模型确实具有以下的不合理性：在串联模型中，认为 A、B、C 这三部电话机必须同时可用，电话系统才满足使用需求，忽略了即使只有 1 部电话机可用也能在一定程度，甚至在很大程度上满足使用需求的事实。而在并联模型中，A、B、C 这三部电话

机的重要性被同等对待，视 A、B、C 电话机互为备份，忽略了 A、B、C 电话机对满足使用需求所作出贡献大小的不同。

由于经典可靠性模型理论未考虑重要度因素，所以无法恰当地建立上述电话系统或类似系统的可靠性模型。

2. 和联系统及可靠性模型应用举例

针对此问题，国内可靠性专家周源泉教授在上世纪 80 年代提出了“和联”系统的概念，并给出了和联系统的可靠性框图及可靠性数学模型如图 1 和式 1：

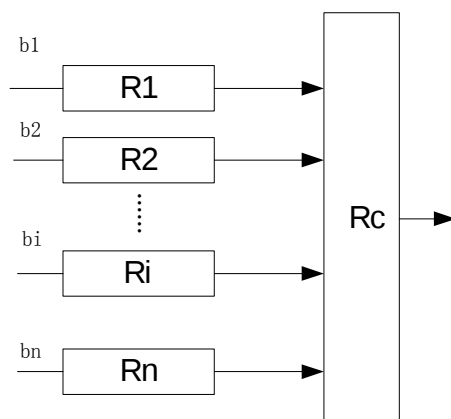


图 1 和联系统的可靠性框图

和联系统的可靠性可靠性数学模型：

$$R_s(t) = R_c(t) \cdot \sum_{i=1}^N (b_i \cdot R_i(t)) \quad \text{式 1}$$

$$\sum_{i=1}^N b_i = 1$$

式 1 中 $R_s(t)$ ——和联系统的任务可靠度；

$R_c(t)$ ——和联系统中控制单元的可靠度；

$R_i(t)$ ——和联系统中第 i 个支路单元的可靠度；

b_i ——和联系统中第 i 条支路单元完成任务的比率（或满意

度)。

“和联”系统的定义——当系统规定的任务由 n 个不能互相取代的支任务组成，其第 i 个 ($i=1\cdots n$) 支任务由相应的支路单元 B_i 及中心单元 C (合称第 I 支路) 配合完成时，这样的系统称为和联系统。上述电话系统符合这一定义，假定 A 、 B 、 C 三部电话所在支路的任务比率分别是 0.7 、 0.2 、 0.1 ；电话及交换机的可靠度分别为 R_A 、 R_B 、 R_C 、 R_D ，按照给出的模型，可以建立该系统的可靠性框图及可靠性数学模型如图 2 和式 2：

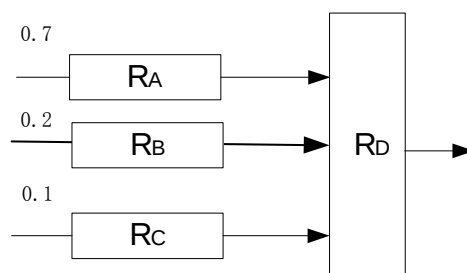


图 2 电话系统的可靠性框图

$$R_s = (0.7R_A + 0.2R_B + 0.1R_C) R_D \quad \text{式 2}$$

3. 和联模型的数学证明

3.1 特例证明

上述电话系统的输出可以看作是由三个独立支路向系统中的综合控制单元（交换机 C ）输入后形成。并且这三条支路独立运行时均能使系统产生输出，但并非能够达到 100% 的满意度，只有 A 、 B 、 C 这三部电话同时可用时，才认为达到 100% 的满意。这里引入“满意度”的概念（在多任务系统中与支路的重要度或任务权重有密切关系），“满意度”定义为“和联”系统的输出能够满足任务需求的程度与系

统期望的满足程度(为 100%)的比值。对于上述电话系统, 定义系统中 A 电话所在的第 1 条支路有输出时, 系统的满意度为 b_1 , 并假设为 70%; 系统中 B 电话所在的第 2 条支路有输出时, 系统的满意度为 b_2 , 假设为 20%; 系统中 C 电话所在的第 3 条支路有输出时, 系统的满意度为 b_3 , 假设为 10%; 各支路的满意度的代数和为 1。此时, 电话系统在第 i 条支路运行时的任务成功率为该支路的满意度与该支路的可靠度以及综合控制单元可靠度的乘积: $b_i R_i R_D$, 其物理含义是: 当系统在第 i 条支路运行时, 系统以 $R_i R_D$ 的可靠度、以 b_i 的满意程度执行任务。3 条支路均有输出时, 该电话系统的任务成功率 (用 P 表示) 为各支路任务成功率之和: $P = (b_1 R_A + b_2 R_B + b_3 R_C) R_D$

所以上述电话系统的任务成功率为:

$$R_S = (0.7 R_A + 0.2 R_B + 0.1 R_C) R_D$$

特例证毕。

3.2 一般公式的证明

对于一个由 N 个可靠度为 R_i (i 为 1 至 N) 的分支及一个可靠度为 R_c 的控制单元所组成的系统 (和联系统), 定义各分支同时运行时, 系统达到的期望任务目标, 满意度为 100%, 设各分支单独运行时的“满意度” (又可称任务比率) b_i , 定义 $\sum_{i=1}^N b_i = 1$, 设系统各分支独立运行时达到期望任务目标的事件为 A_i , i 为 1 至 N 。事件 A_i 的概率为 $P(A_i)$, 显然 $P(A_i) = b_i R_i R_c$ 。

系统达到期望任务目标的事件是事件 A_i 的和事件, 其概率为 $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_i \cup \dots \cup A_N)$ 。由于在事件 A_1 、 A_2 、 $\dots$ 、 A_i 、 $\dots$ 、 A_N

中，不可能同时有两个或两个以上事件发生（系统不可能同时出现以两种以上不同的满意度达到的期望任务目标的情况），既事件 A_1 、 A_2 、…… A_i …… A_N 为互不相容事件，根据互不相容事件的概率和的运算性质，有：

$$\begin{aligned}
 & P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_i \cup \dots \cup A_N) \\
 &= P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_i) + \dots + P(A_N) \\
 &= \sum_{i=1}^N P(A_i) \\
 &= \sum_{i=1}^N b_i R_i(t) R_c(t) \\
 &= R_c(t) \sum_{i=1}^N b_i R_i(t)
 \end{aligned}$$

证毕。

如果将事件 A_i 与发生的概率看作为条件概率时,依据条件概率运算法则同样可以证明“和联”数学模型的成立。

4.结语

“和联”系统的概念应用的范围是非常广泛的，在航空、航天领域广泛应用。舰船作战系统在宏观上也符合和联系统的定义，因此“和联”模型在上世纪 90 年代就已经在舰船领域应用。目前，“和联”系统概念及模型被认知的范围还很窄。作者在可靠性商业软件的定制过程中，得知国外还没有“和联”模型的概念，本文的“和联”模型应用举例以及数学证明是应国外可靠性商业软件开发商的要求而给出的，并得到其认同。“和联”模型不久将加入到国际性的可靠性商业软件 RBD 模块中。

参考文献

- [1] 周源泉 可靠性评定 科学出版社 1990 年
- [2] 范敏 和联模型在舰载作战系统可靠性建模中的应用 迈向新世纪的舰船电子工程——第六届年会论文集 中国造船工程学会电子技术委员会 1999 年