可靠性模型
Reliability Model

北京航空航天大学工程系统工程系

系统可靠性模型建立-1

- 可靠性模型有关术语及定义
- 基本可靠性模型－任务可靠性模型
- 建立系统任务可靠性模型的程序
- 系统功能分析
- 典型的可靠性模型

系统可靠性模型建立-2

- 不可修系统可靠性模型
  - 虚单元
  - 不含桥联的复杂系统任务可靠性模型
  - 含桥联的复杂系统任务可靠性模型
- 建模实例：某卫星过渡轨道、同步及准同步轨道任务可靠性
- 系统任务可靠性建模的注意事项

系统、单元——产品

- 系统
  - 由相互作用和相互依赖的若干单元结合成的具有特定功能的有机整体。
  - “系统”、“单元”
    - 相对概念
      - 可以是按产品层次划分：零部件、组件、设备、分系统、系统、装备中任何相对的两层
    - “系统”包含“单元”，其层次高于“单元”
- 产品可以指任何层次。

模型

- 原理图
  - 反映了系统及其组成单元之间的物理上的连接与组合关系
- 功能框图、功能流程图
  - 反映了系统及其组成单元之间的功能关系
- 系统的原理图、功能框图和功能流程图是建立系统可靠性模型的基础

- 可靠性模型
  - 描述了系统及其组成单元之间的故障逻辑关系
  - 多种可靠性建模方法：
    - 可靠性框图
    - 网络可靠性模型
    - 故障树模型
    - 事件树模型
    - 马尔可夫模型
    - Petri网模型
    - GO图模型

可靠性框图

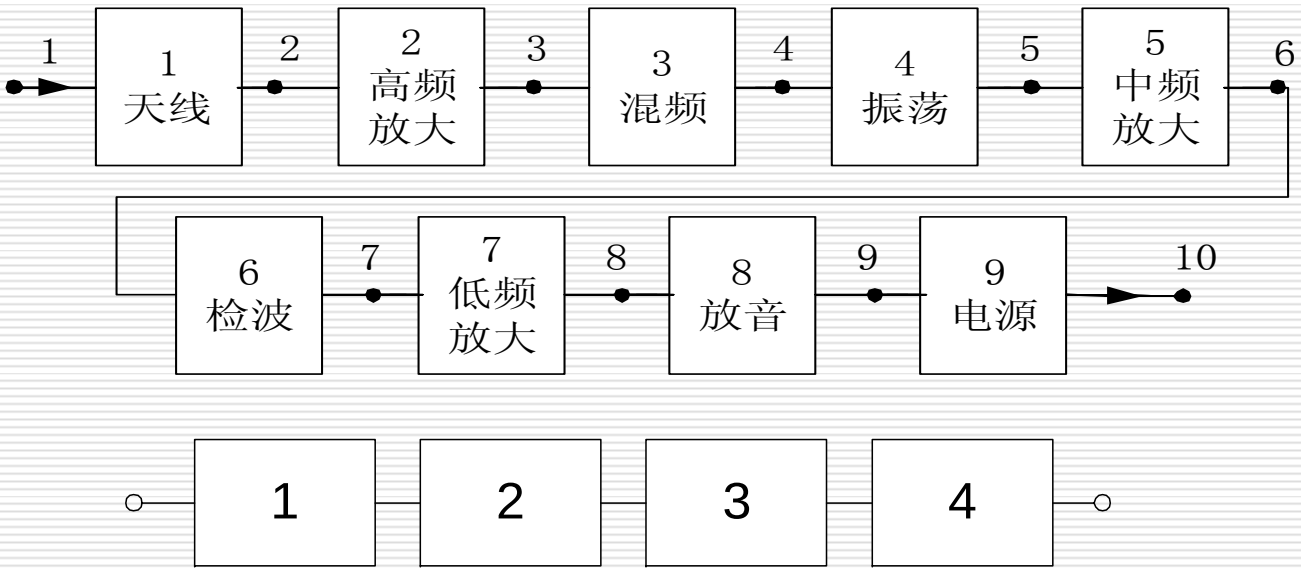
- 为预计或估算产品的可靠性所建立的可靠性方框图和数学模型。
  - 方框：产品或功能
  - 逻辑关系：功能布局
  - 连线：系统功能流程的方向
    - 无向的连线意味着是双向的。
  - 节点（节点可以在需要时才加以标注）
    - 输入节点：系统功能流程的起点
    - 输出节点：系统功能流程的终点
    - 中间节点

图例

可靠性模型示例

可靠性框图

（收音机）



可靠性数学模型

$$R_s(t)=\prod_{i=1}^{n}R_i(t)=\prod_{i=1}^{n}e^{-\lambda_i t}=e^{-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i t}$$

基本可靠性模型

- 基本可靠性模型
  - 用以估计产品及其组成单元发生故障所引起的维修及保障要求的可靠性模型。
    - 度量使用费用
    - 全串联模型
    - 储备单元越多，系统的基本可靠性（无故障持续时间和概率）越低

任务可靠性模型

- 任务可靠性模型
  - 用以估计产品在执行任务过程中完成规定功能的概率（在规定任务剖面中完成规定任务功能的能力），描述完成任务过程中产品各单元的预定作用，用以度量工作有效性的一种可靠性模型。
    - 系统中储备单元越多，则其任务可靠性越高。
- 注意事项
  - 模型描述的是各单元之间的可靠性逻辑关系

基本可靠性模型－任务可靠性模型

- 在进行设计时，根据要求**同时建立**基本可靠性及任务可靠性模型的目的在于，需要在人力、物力、费用和任务之间进行**权衡**。
- **设计者的责任**就是要在不同的设计方案中利用基本可靠性及任务可靠性模型进行权衡，**在一定的条件下得到最合理的设计方案**。
- 为正确地建立系统的任务可靠性模型，必须**对**系统的构成、原理、功能、接口等**各方面有深入的理解**。

F18基本可靠性模型

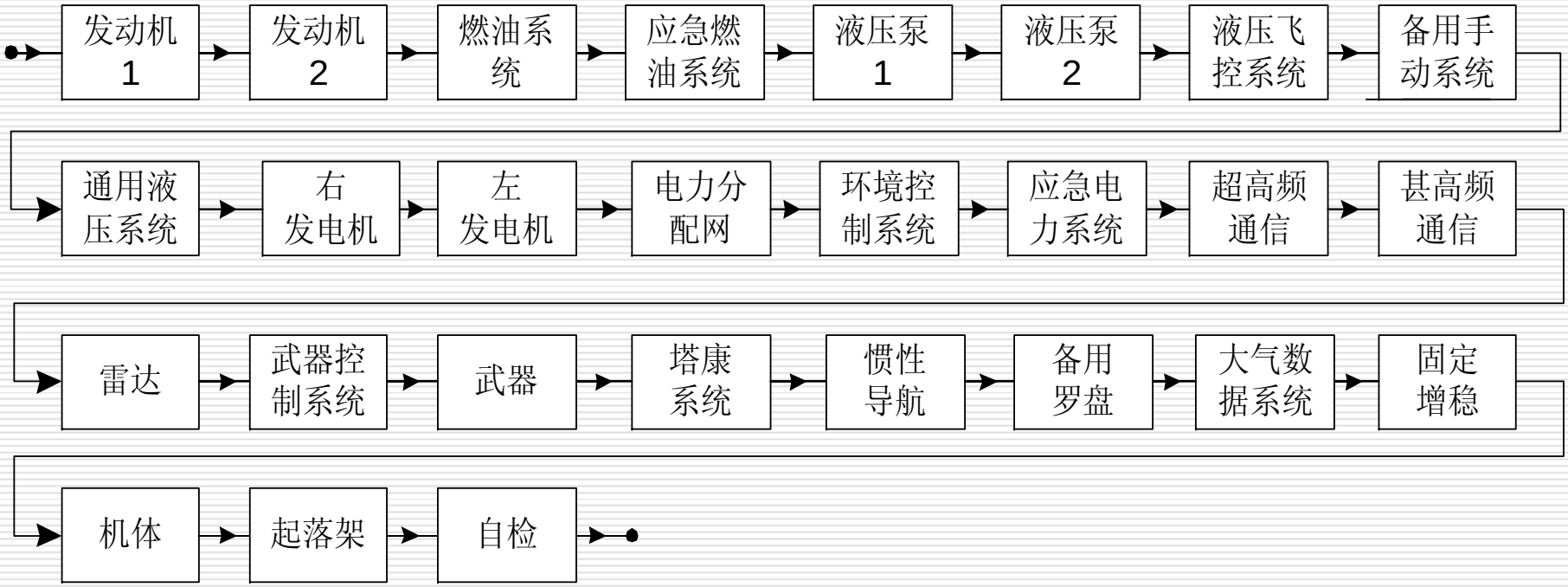


图3-4 F/A-18基本可靠性框图

F18任务可靠性模型

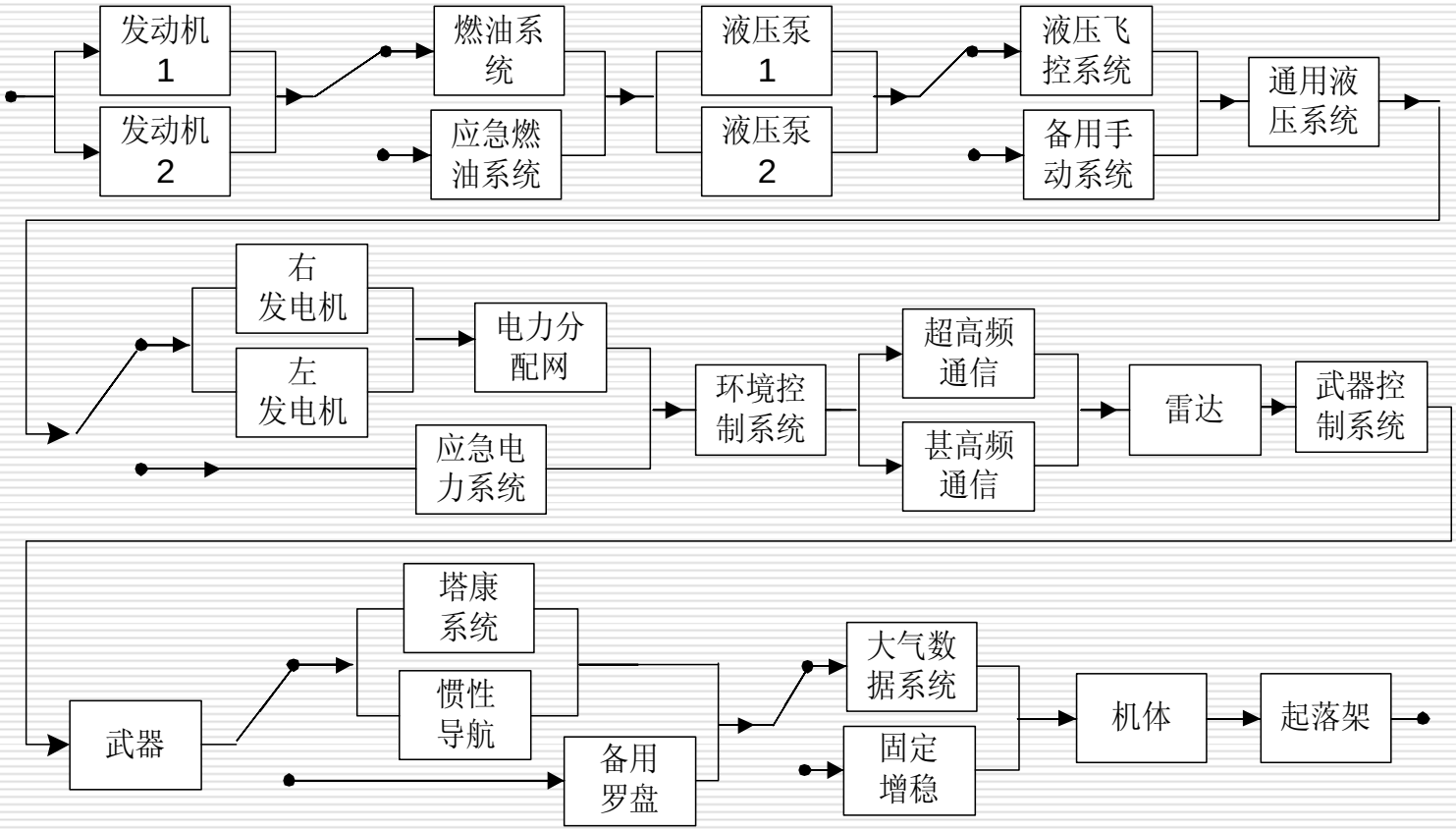
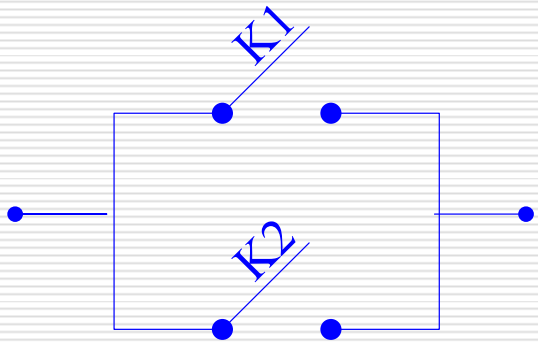
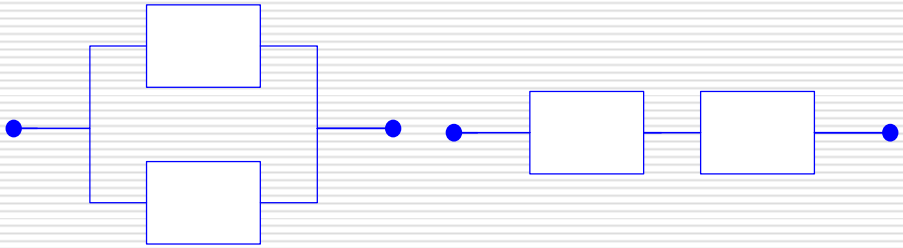


图3-5 F/A-18任务可靠性框图

可靠性逻辑关系





双开关系

建立系统任务可靠性模型的程序

建模步骤		
1、规定产品定义	(1) 确定任务和功能	功能分析
	(2) 确定工作模式	
	(3) 规定性能参数及范围	故障定义
	(4) 确定物理界限与功能接口	
	(5) 确定故障判据	
	(6) 确定寿命剖面及任务剖面	时间及环境条件分析
2.建立可靠性框图	(7) 明确建模任务并确定限制条件	
	(8) 建立系统可靠性框图	
3.确定数学模型	(9) 确定未列入模型的单元	
	(10) 系统可靠性数学模型	

系统功能分析

- 对系统的构成、原理、功能、接口等各方面深入的分析是建立正确的系统任务可靠性模型的前导。
- 前导工作的主要任务就是进行系统的功能分析
  - 功能的分解与分类
  - 功能框图与功能流程图
  - 时间分析
  - 任务定义及故障判据

功能的分解与分类

- 功能的分解
  - 系统往往是多任务与多功能的
  - 一个系统及功能是由许多分系统级功能实现的
  - 通过自上而下的功能分解过程，可以得到系统功能的层次结构
    - 功能的逐层分解可以细分到可以获得明确的技术要求的最低层次（如部件）为止。
  - 进行系统功能分解可以使系统的功能层次更加清晰，同时也产生了许多低层次功能的接口问题。
  - 对系统功能的层次性以及功能接口的分析，是建立可靠性模型的重要一步。

功能的分解

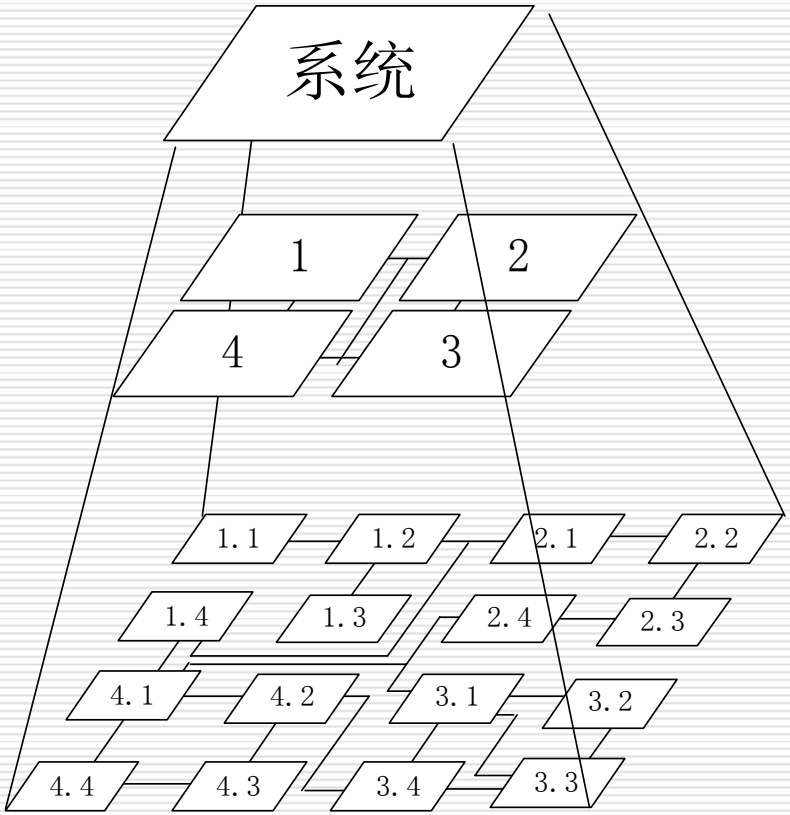


图3-6 功能分解示意图

功能的分类

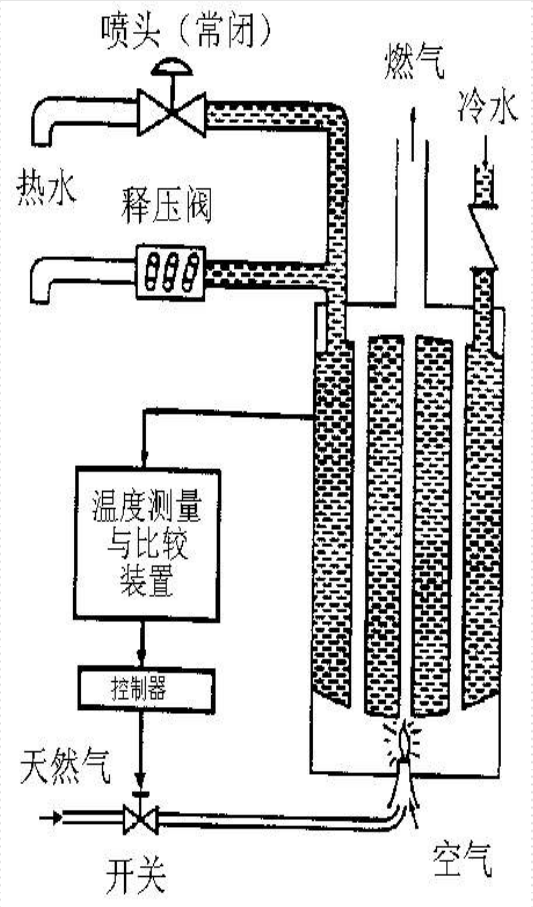
- 在系统功能分解的基础上，可以按照给定的任务，对系统的功能进行整理。

分类		定义
按重要程度分	基本功能	1. 起主要的必不可少的作用； 2. 担任主要的任务，实现其工作目的； 3. 它的作用改变了，就会产生整体性的变化。
	辅助功能	针对某种特定的构思所必需的功能，或辅助实现基本功能所需要的功能。它相对于基本功能是次要的或从属的。
按用户要求分	必要功能	对于用户的任务需求而言，是必要的和不可缺少的。
	不必要功能	对于用户的任务需求而言，该功能并非是非有不可的。

功能框图与功能流程图

- 用以描述在系统功能分解的过程中，较低层次功能间的接口与关联关系。
  - 功能框图
  - 功能流程图
- 功能框图与功能流程图的逐级细化过程是与系统的功能分解相协调的。

原理图、功能层次图及功能框图



某家用热水器原理图

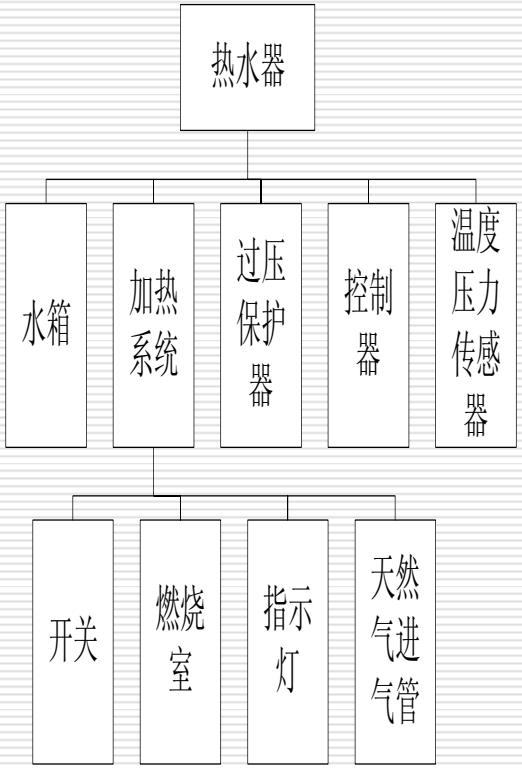


图3-8 家用热水器功能层次

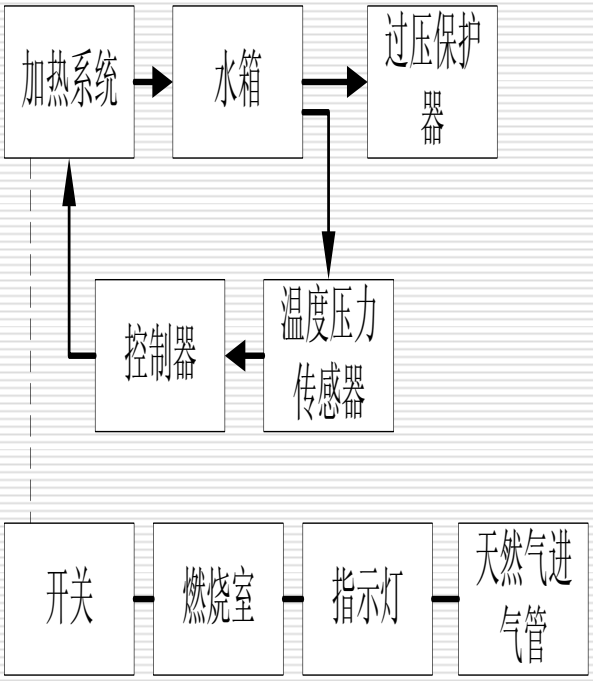
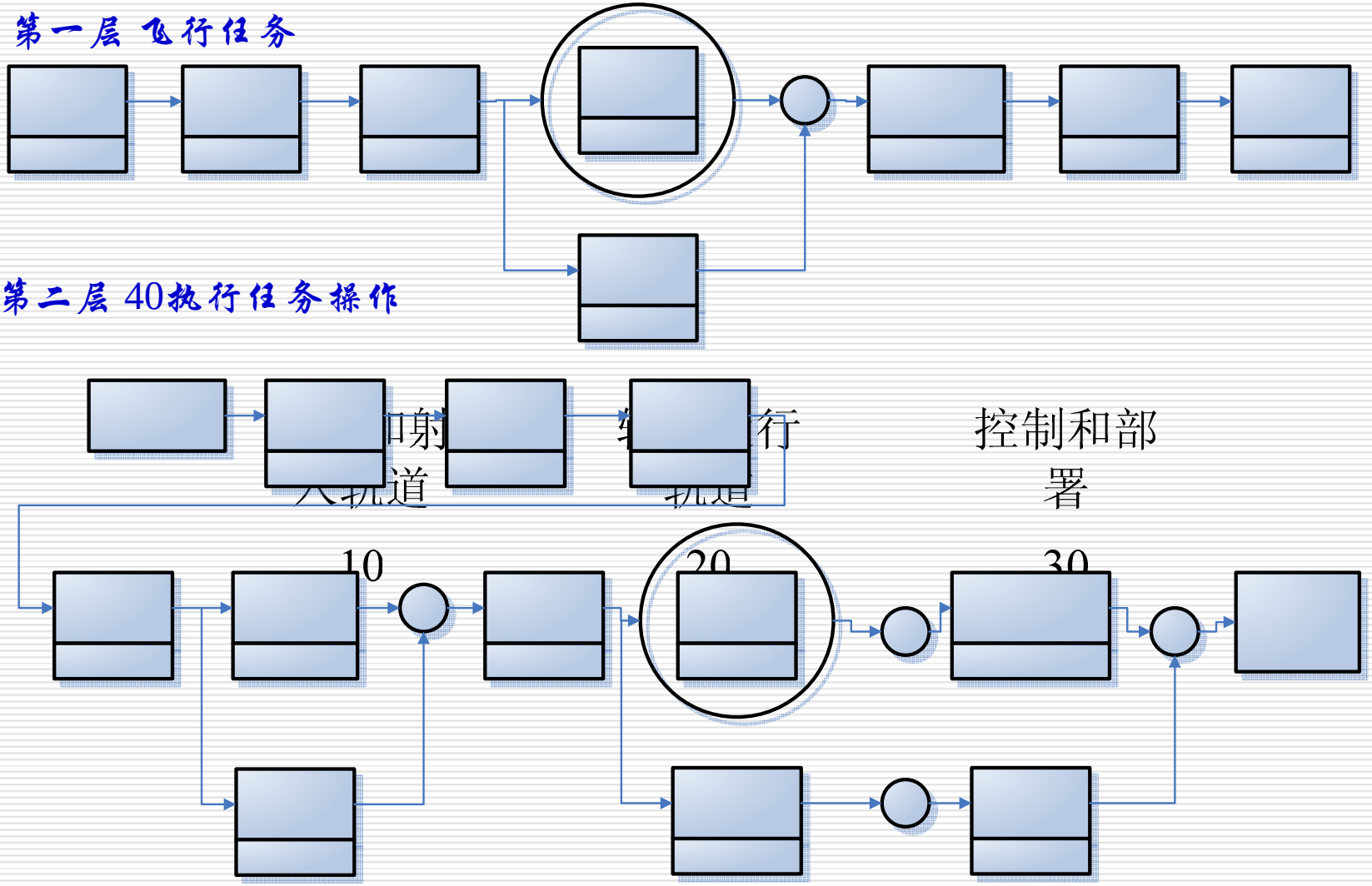


图3-9 家用热水器功能框图

某空间飞行器整个飞行任务在最高层次以及下级层次中的功能流程



转到运行轨 提供姿态 提供热

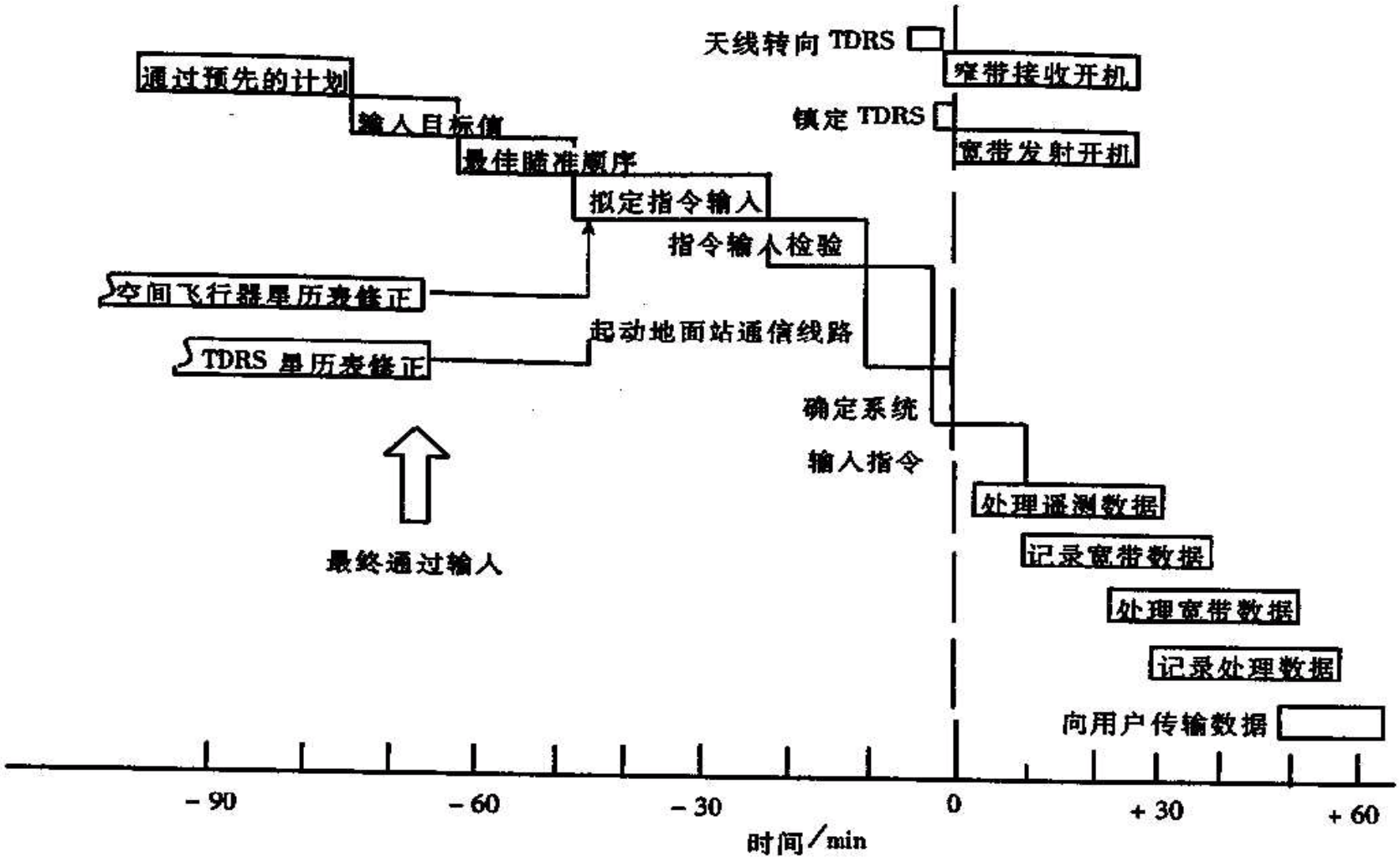
时间分析-1

- 功能框图——静态（不随时间而变）
  - 系统级的功能以及它们的子功能具有唯一的时间基准（所有功能的执行时间一样长）
- 系统的功能随时间而变的系统——功能流程图
  - 可以描述这类系统的功能关系，为建立系统可靠性框图模型奠定基础
  - 功能流程图的一个缺陷：没有对系统功能的持续时间及功能间的时间进行描述，缺少一个时间坐标
  - 时间特性是可靠性分析中不可缺少的一个要素

时间分析-2

- 复杂系统一般具有两方面的特点：
  （1）系统具有多功能，各功能的执行时机是有时序的，各功能的执行时间长短不一
  （2）在系统工作的过程中，系统的结构是可以随时间而变化
- 需要进行时间分析
  - 确定时间基准
  - 通过与该时间基准对应，可以得到系统功能流程图中各功能的执行时间及功能间的时间

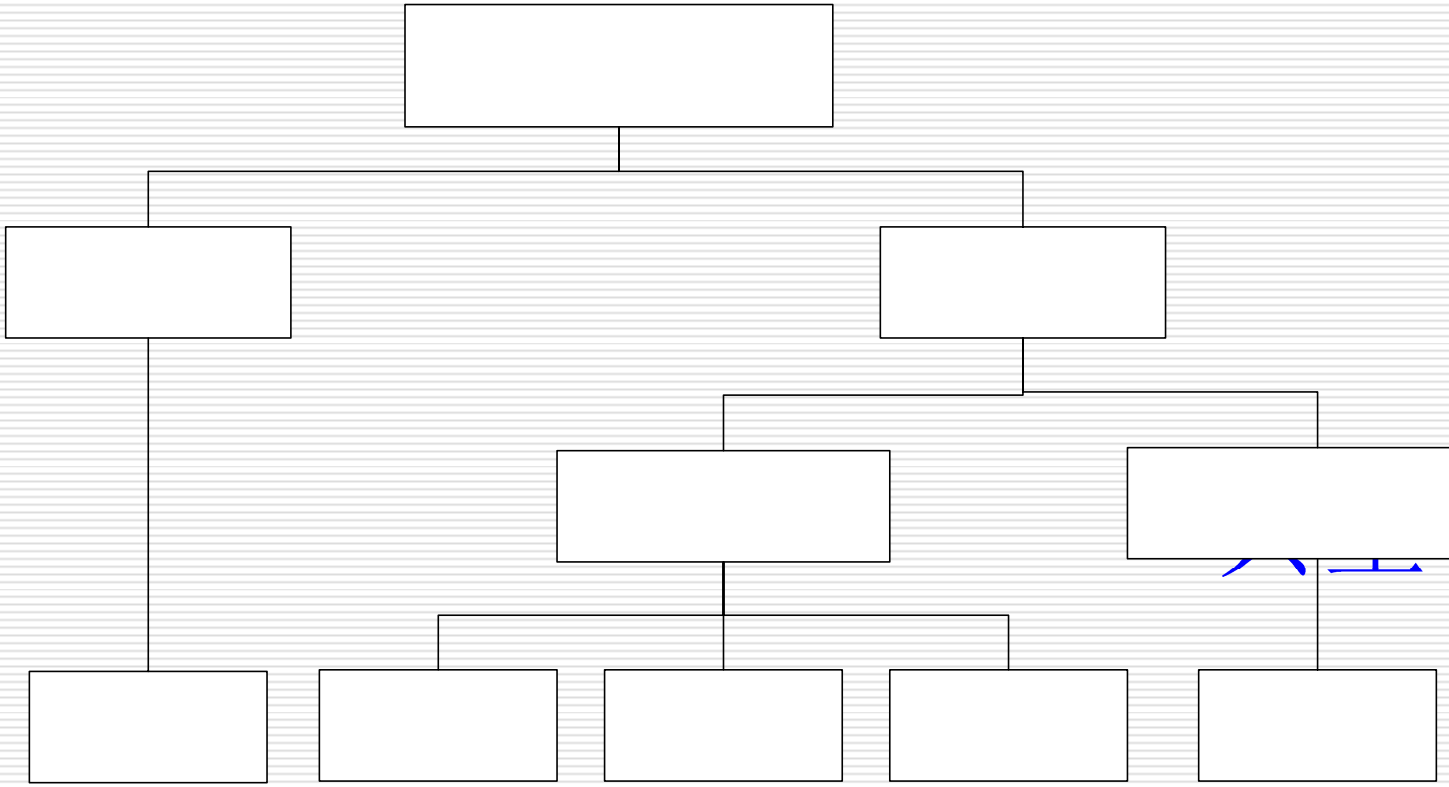
某飞行任务的时间基准



任务定义及故障判据

- 在进行系统功能分解、建立功能框图或功能流程图及确立时间基准的基础上，要建立系统的任务及基本可靠性框图，必须明确地给出系统的任务定义及故障判据，把它们作为系统可靠性定量分析计算的依据和判据。
  - 产品或产品的一部分不能或将不能完成预定功能的事件或状态，称为故障。
  - 对于具体的产品应结合产品的功能以及装备的性质与使用范畴，给出产品故障的判别标准，即故障判据。故障判据是判断产品是否构成故障的界限值。

典型可靠性模型分类



典型可靠性模型

非储备模型

假设

(a) 系统及其组成单元只有故障与正常两种状态，不存在第三种状态；

(b) 用框图中一个方框表示的单元或功能发生故障就会造成整个系统的故障（有替代工作方式的除外）；

(c) 就故障概率来说，用不同方框表示的不同功能或单元其故障概率是相互独立的。

(d) 系统的所有输入在规定极限之内，即不考虑由于输入错误而引起系统故障的情况；

(e) 当软件可靠性没有纳入系统可靠性模型时，应假设整个软件是完全可靠的；

(f) 当人员可靠性没有纳入系统可靠性模型时，应假设人员是完全可靠的，而且人员与系统之间没有相互作用问题。

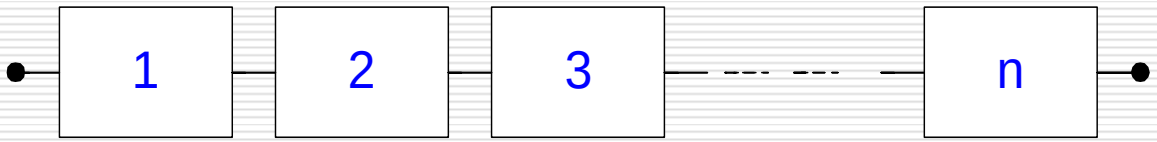
典型可靠性模型

- 串联模型
- 并联模型
- 表决模型(r/n(G)模型)
- 非工作贮备模型（旁联模型）
- 桥联模型

串联模型

定义

- 组成系统的所有单元中任一单元的故障都会导致整个系统故障的称为串联系统。
  - 串联系统是最常用和最简单的模型之一。
  - 串联系统的逻辑图如下图所示：



串联系统可靠性框图

串联系统数学模型

$$R_s(t)=\prod_{i=1}^{n}R_i(t)=\prod_{i=1}^{n}e^{-\int_0^t\lambda_i(t)dt}$$

当各单元服从指数分布时：

$$R_s(t)=\prod_{i=1}^{n}e^{-\lambda_i t}=e^{-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i t}$$

串联系统数学模型

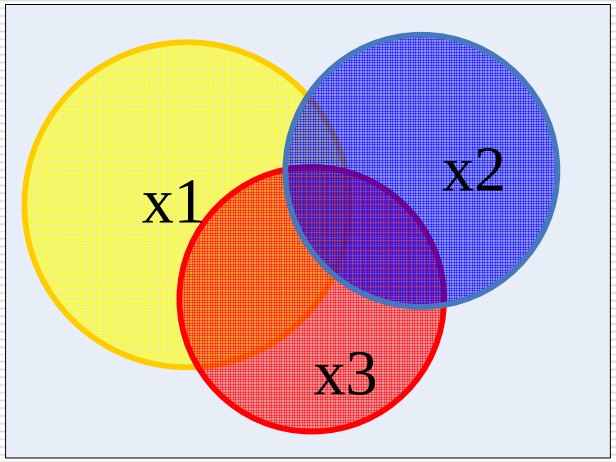
- 当各单元的寿命分布均为指数分布时，系统的寿命也服从指数分布，系统的故障率为单元的故障率之和：

$$\lambda_s = -\frac{\ln(R_s(t))}{t} = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\ln(R_i(t))}{t} = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i$$

- 系统的平均故障间隔时间：

$$T_{BF_S} = 1/\lambda_s = 1\Big/\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$$

串联模型



S——系统正常

xi——单元i正常

S=x1 ∩ x2∩x3

当几个单元相互独立，系统可靠度：

$$R_s(t) = P(S)$$
$$= P(x1)\square P(x2)\square P(x3)$$
$$= R_1(t)R_2(t)R_3(t)$$

串联模型

在设计时，为提高串联系统的可靠性，可从下列三方面考虑：

(a) 尽可能减少串联单元数目

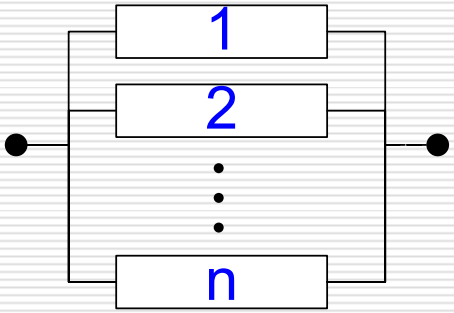
(b) 提高单元可靠性，降低其故障率

(c) 缩短工作时间

$$R_s(t)=\prod_{i=1}^{n}R_i(t)$$

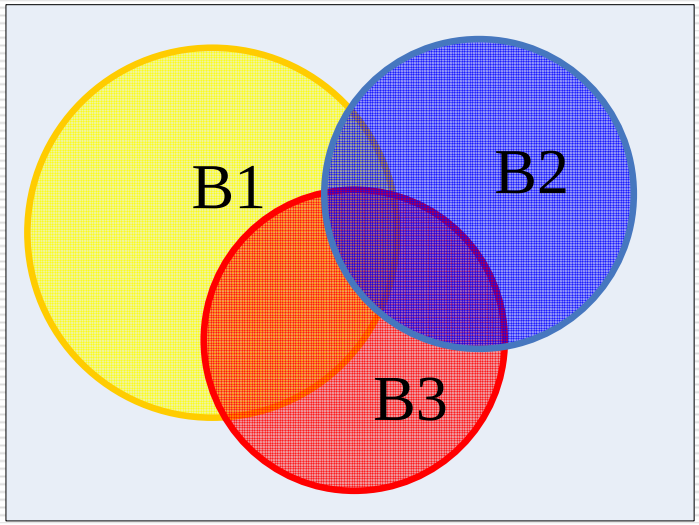
并联模型

- 并联模型
  - 组成系统的所有单元都发生故障时，系统才发生故障的称为并联系统。
    - 并联系统是最简单的冗余系统（有贮备模型）。
    - 并联系统的逻辑图如图所示，其数学模型为：



$$R_S(t)=1-\prod_{i=1}^{n}\left[1-R_i(t)\right]$$

并联模型



B——系统故障

Bi——单元i故障

$B=B1 \cap B2 \cap B3$

当个单元相互独立，系统不可靠度：

$$F_s(t)=P(B)$$
$$=P(B1)\square P(B2)\square P(B3)$$
$$=F_1(t)\square F_2(t)\square F_3(t)$$

并联模型

- 系统可靠度 $R_S(t)=1-\prod_{i=1}^{n}[1-R_i(t)]$

- 当系统各单元的寿命分布为指数分布时，对于最常用的两单元并联系统，有

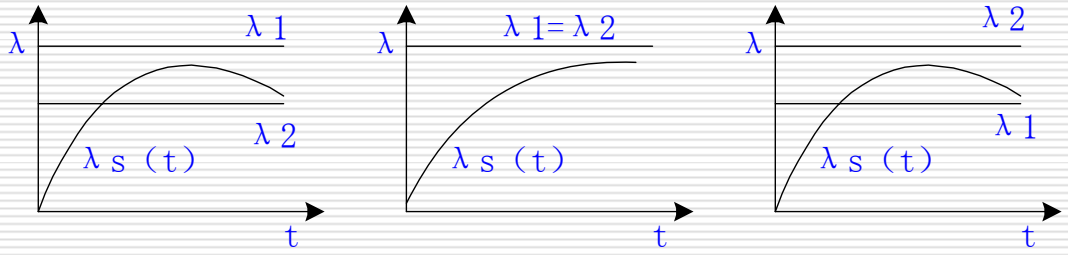
$$R_s(t)=e^{-\lambda_1 t}+e^{-\lambda_2 t}-e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$$

$$\lambda_s(t)=\frac{\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}+\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}-(\lambda_1+\lambda_2)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}}{e^{-\lambda_1 t}+e^{-\lambda_2 t}-e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}}$$

$$T_{BCF_s}=\int_0^{\infty}R_s(t)dt=\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}-\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

并联模型

- 即使单元故障率都是常数，而并联系统的故障率不再是常数。



并联模型故障率曲线

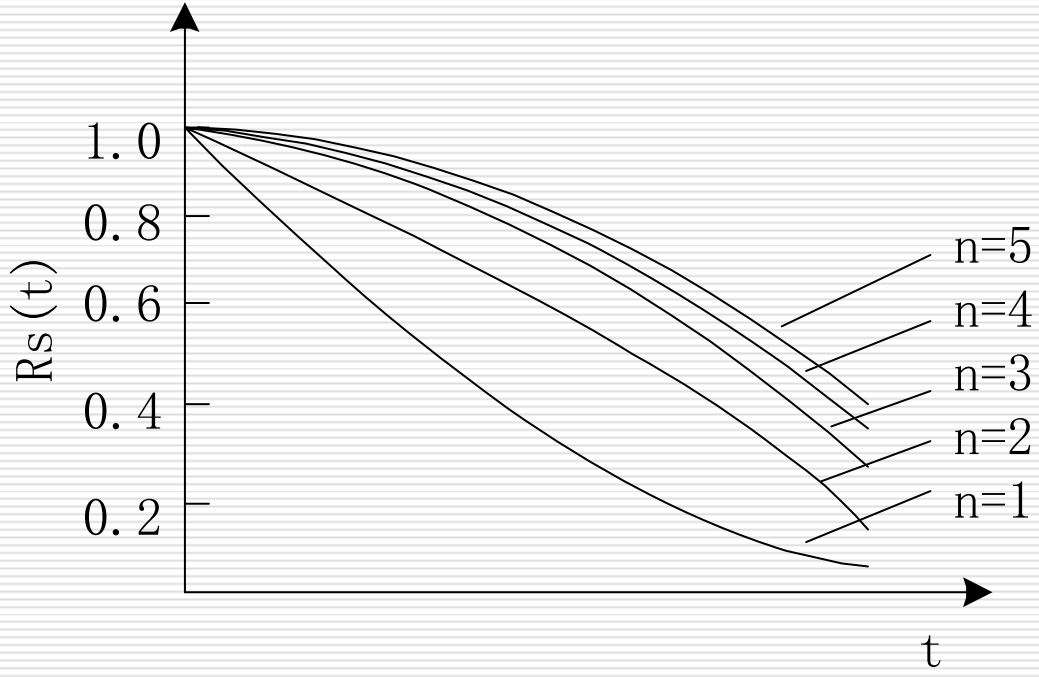
- 当系统各单元的寿命分布为指数分布时，对于n个相同单元的并联系统，有

$$R_s(t) = 1-(1-e^{-\lambda t})^n$$

$$T_{BCF_s} = \int_0^\infty R_s(t)dt = \frac{1}{\lambda}+\frac{1}{2\lambda}+\cdots+\frac{1}{n\lambda}$$

并联模型

- 与无贮备的单个单元相比，并联可明显提高系统可靠性（特别是n=2时）
  - 当并联过多时可靠性增加减慢

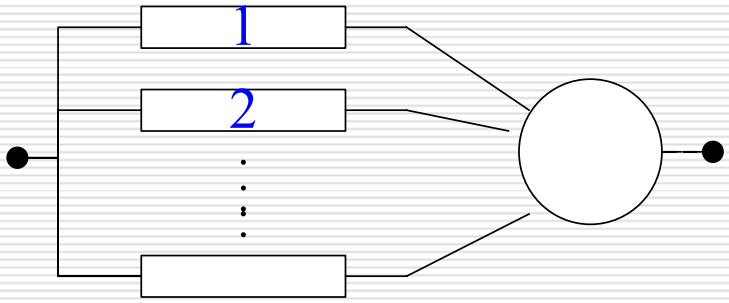


并联单元数与系统可靠度的关系

表决模型

表决模型(模型)

- 组成系统的n个单元中，正常的单元数不小于r（$1 \leqslant r \leqslant n$）系统就不会故障，这样的系统称为$r/n(G)$表决模型。
  - 它是工作贮备模型的一种形式。
  - 可靠性框图如下图：



/ ( )

表决模型

- 若组成系统的各单元相同，每个单元失效概率为q，正常工作概率为p，则$r/n(G)$表决模型服从二项分布

$$(p+q)^n = p^n + \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} p^{n-1}q + \cdots + \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} p^r q^{n-r} + \cdots + \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} q^n$$

- 系统可靠度（假设表决器完全可靠）

$$R_s(t) = p^n + \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} p^{n-1}q + \cdots + \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} p^r q^{n-r}$$

r/n(G) 系统的数学模型

$$R_S(t) = R_m \sum_{i=r}^{n} C_n^i R(t)^i [1 - R(t)]^{n-i}$$

式中：

$R_S(t)$ —— 系统的可靠度；

$R(t)$ —— 系统组成单元（各单元相同）的可靠度；

R_m —— 表决器的可靠度。

表决模型

- 当各单元的可靠度是时间的函数，且寿命服从故障率为λ的指数分布时，系统可靠度为：

$$R_s(t) = R_m \sum_{i=r}^{n} C_n^i e^{-i\lambda t} \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{n-i}$$

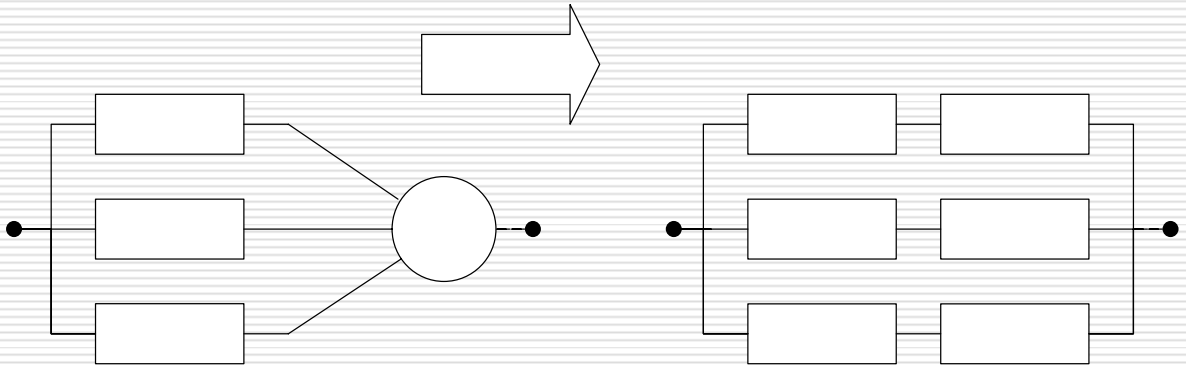
当表决器的可靠度为1时，系统的致命故障间任务时间为：

$$T_{BCF_s} = \int_0^{\infty} R_s(t)dt = \sum_{i=r}^{n} \frac{1}{i\lambda}$$

多数表决系统（2/3(G)表决模型）

在$r/n(G)$模型中，当n必须为奇数（令为$2k+1$），且正常单元数必须大于$n/2$（不小于$k+1$）时系统才正常，这样的系统称为多数表决模型。多数表决模型是$r/n(G)$系统的一种特例。

- 三中取二系统是常用的多数表决模型，其可靠性框图如下图



2/3(G)

2/3(G)表决模型

□其可靠性数学模型为（表决器可靠度为1，组成单元的故障率均为常值λ）：

$$R_s(t) = \binom{3}{2} e^{-2\lambda t}(1-e^{-\lambda t}) + \binom{3}{3} e^{-3\lambda t}$$

$$= 3e^{-2\lambda t} - 2e^{-3\lambda t}$$

$$T_{BCF_s} = \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{3\lambda}$$

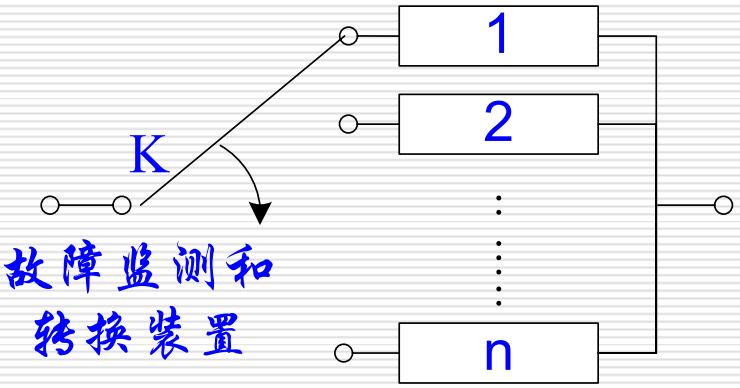
$$= \frac{5}{6\lambda}$$

表决系统特例

- 若表决器的可靠度为1：
  - 当$r=1$时，$1/n(G)$即为并联系统，
  - 当$r=n$时，$n/n(G)$即为串联系统；
- 系统的$MTBCF_S$比并联系统小，比串联系统大。

非工作贮备模型（旁联、冷贮备）

- 组成系统的各单元只有一个单元工作，当工作单元故障时，通过转换装置接到另一个单元继续工作，直到所有单元都故障时系统才故障，称为非工作贮备系统，又称旁联系统。
  - 非工作贮备系统的可靠性框图如下图。



非工作贮备系统可靠性框图

非工作贮备模型

- 非工作贮备系统的可靠性数学模型如下：

（a）假设：转换装置可靠度为1，则系统的$MTBCF_S$等于各单元$MTBCF_i$之和。

$$T_{BCF_S} = \sum_{i=1}^{n} T_{BCF_i}$$

- 当系统各单元的寿命服从指数分布时：

$$T_{BCF_S} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i}$$

非工作贮备模型（续）

- 系统的各单元都相同时：

$$T_{BCF_S} = \frac{n}{\lambda}$$

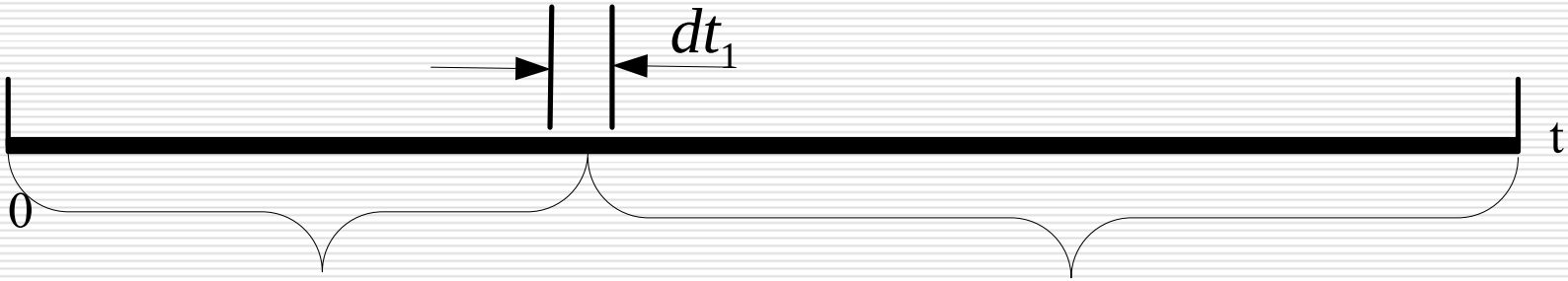
$$R_s(t) = e^{-\lambda t}\left[1 + \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \cdots + \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\right]$$

- 对于常用的两个不同单元组成的非工作贮备系统：

$$(n = 2, \lambda_1 \neq \lambda_2) \qquad R_s(t) = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_2 t}$$

$$T_{BCF_s} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}$$

非工作贮备模型（续）



A——系统正常，A1——1单元正常，A2——2单元正常

$$A = A1 \cup \left(\bar{A}1 \cap A2 \right)$$

$$P\left(\bar{A}1 \cap A2 \right) = \int_0^t R_2\left(t - t_1\right) dF_1\left(t_1\right) = \int_0^t e^{-\lambda_2 (t-t_1)} \lambda_1 e^{-\lambda_1 t_1} dt_1$$

$$R_s\left(t\right) = e^{-\lambda_1 t} + \lambda_1 e^{-\lambda_2 t} \int_0^t e^{-(\lambda_1 - \lambda_2) t_1} dt_1 = e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t} \right)$$

非工作贮备

非工作贮备模型

（b）假设：转换装置的可靠度为常数R_D，

- 两个单元相同且寿命服从指数分布，系统的可靠度为

$$R_s(t) = e^{-\lambda t}(1 + R_D \lambda t)$$

- 对于两个不相同单元 ：

$$R_s(t) = e^{-\lambda_1 t} + R_D \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}(e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t})$$

$$T_{BCF_s} = \frac{1}{\lambda_1} + R_D \frac{1}{\lambda_2}$$

非工作贮备的优点是能大大提高系统的可靠度。

其缺点是：

（1）由于增加了故障监测与转换装置而提高了系统的复杂度；

（2）要求故障监测与转换装置的可靠度非常高，否则贮备带来的好处会被严重削弱。

非工作贮备模型

例：某两台发电机构成旁联模型，发电机故障率 $\lambda=0.001h^{-1}$，切换开关成功概率0.98，求运行100小时的可靠度。

解：

$$R(t)=e^{-0.001\times100}(1+0.98\times0.001\times100)=0.9934$$

若两台发动机并联，系统可靠度

$$R(t)=2e^{-\lambda t}-e^{-2\lambda t}=2e^{-0.001\times100}-e^{-2\times0.001\times100}=0.9909$$

若希望旁联可靠度大于并联，则

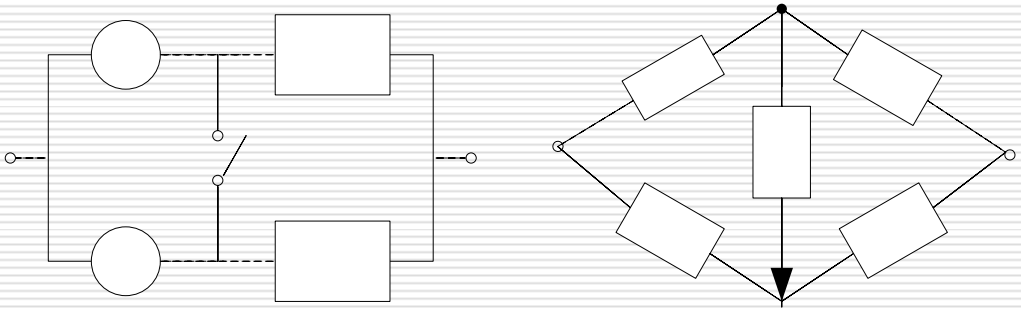
$$e^{-\lambda t}(1+P_s\lambda t)\geqslant 2e^{-\lambda t}-e^{-2\lambda t}$$

因此，要求切换开关成功概率

$$P_s\geqslant(1-e^{-0.001\times100})/(0.001\times100)=0.95$$

桥联模型

- 系统某些功能冗余形式或替代工作方式的实现，是一种非并联、表决或旁联的桥联形式，称为桥联模型。
  - 示例：系统由A、B、C、D、E五个部分组成，当开关E打开时，电机A向设备B供电，电机C向设备D供电。如果电机C故障，合上开关E，由电机A向设备B和D供电。
    - 系统的原理图和可靠性框图如下图 所示。



桥联模型

➢ 桥联模型

- 从图中模型可以看出，在桥联模型中可靠性框图中的单元带有流向，它反映了系统功能间的流程关系。
- 通过观察分析上面的可靠性框图可以得知，当单元A和B，或单元A、D和E，或单元C和D都正常时，系统的功能正常。系统可靠度的数学模型为：

$$R_s(t) = P(AB \bigcup ADE \bigcup CD)$$

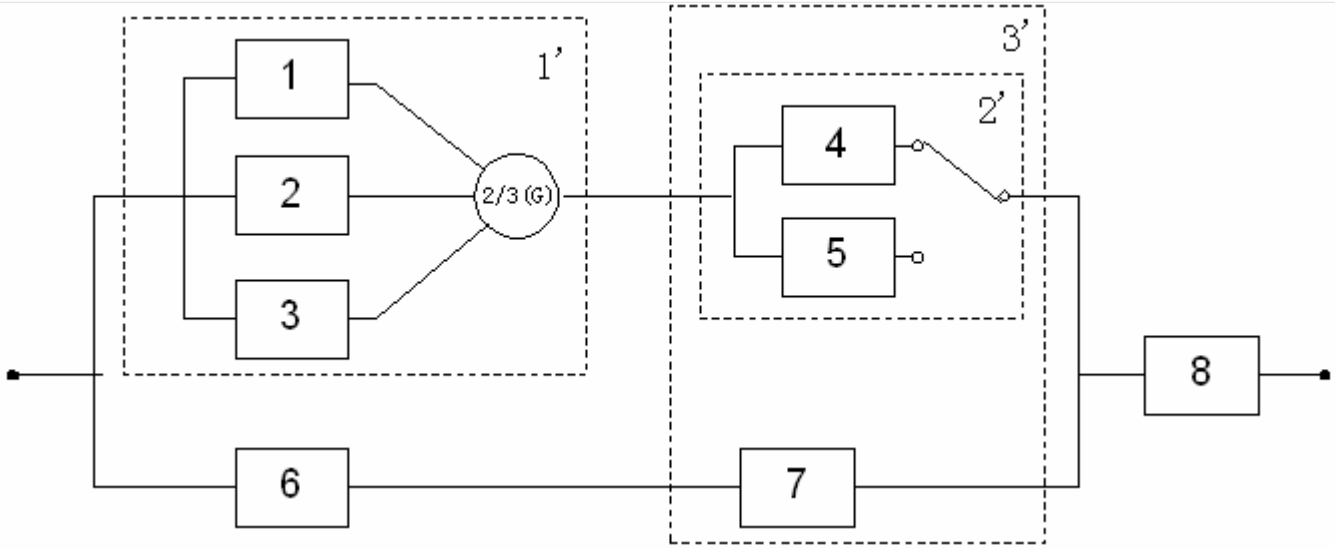
$$= P(AB) + P(ADE) + P(CD) - P(ABDE) - P(ABCD) - P(ACDE) + P(ABCDE)$$

$$= R_A R_B + R_A R_D R_E + R_C R_D - R_A R_B R_D R_E - R_A R_B R_C R_D - R_A R_C R_D R_E + R_A R_B R_C R_D R_E$$

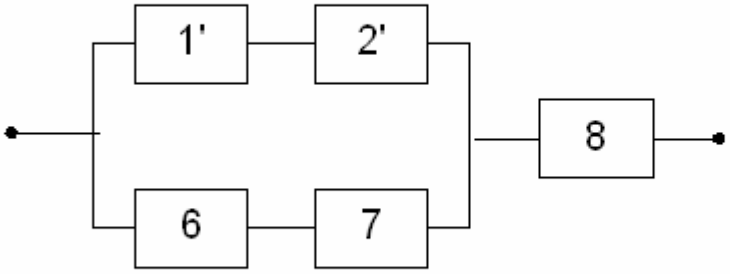
虚单元

- 所谓虚单元就是把一些相互独立的单元组合在一起，构成一个虚拟的单元，达到简化可靠性框图的目的。
  - 充分性：虚单元内的所有单元与虚单元外的单元应是相互统计独立的；
  - 必要性：虚单元内的所有单元之间的逻辑关系不能仅用串联、并联及桥联模型来描述；
  - 虚单元应只有一个逻辑入口和一个逻辑出口。
- 划分虚单元，简化可靠性框图后，可以分步建立系统的可靠性数学模型：
  1. 建立虚单元的可靠度数学模型，并把它作为虚单元的可靠度代入简化后的可靠性框图中；
  2. 对简化后的可靠性框图建立数学模型。

虚单元划分示例



某系统任务可靠性框图



简化后的某系统任务可靠性框图

不含桥联的复杂系统任务可靠性模型

$$R_{1'}(t) = 3e^{-2\lambda t} - 2e^{-3\lambda t}$$

$$R_{2'}(t) = e^{-\lambda t}(1+\lambda t)$$

在划分虚单元后应是一个简洁的串联、并联组合模型

前例图3-21、22

系统的可靠性数学模型为：

$$R_s(t) = R_8(t)\left[1-\left(1-R_6(t)R_7(t)\right)\left(1-R_{1'}(t)R_{2'}(t)\right)\right]$$

$$= e^{-\lambda t}\left\{1-\left(1-e^{-2\lambda t}\right)\left[1-e^{-\lambda t}(1+\lambda t)\left(3e^{-2\lambda t}-2e^{-3\lambda t}\right)\right]\right\}$$

含桥联的复杂系统任务可靠性模型

- 含有桥联的系统任务可靠性框图，在划分虚单元后得到的可靠性框图应是一个串联、并联和桥联的组合模型——网络可靠性模型。（案例）
  - 布尔真值表法
  - 部件状态图示法
  - 全概率分解法
  - 最小路集法

含桥联的复杂系统任务可靠性模型示例

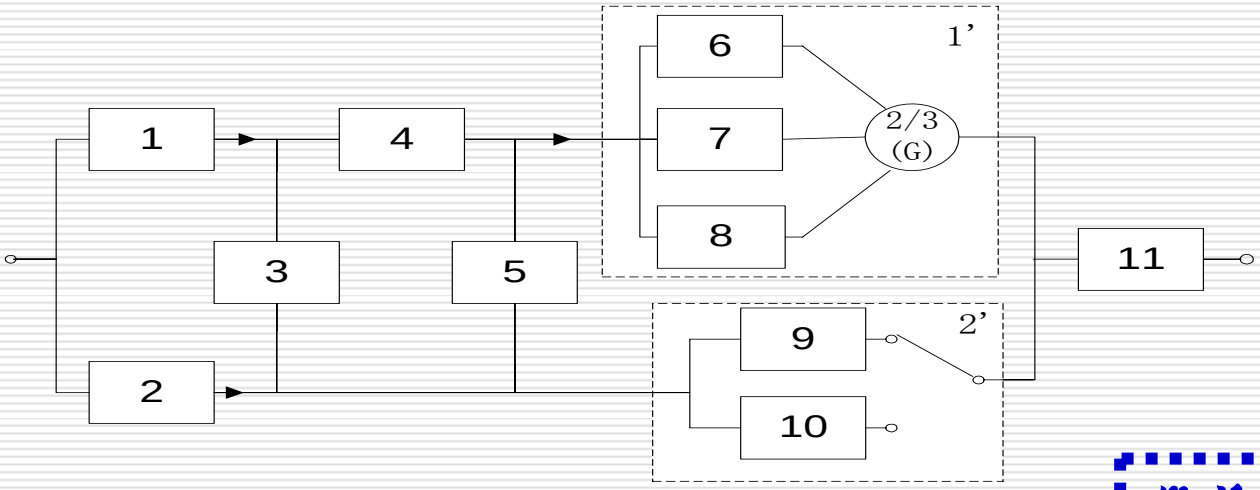


图3-23 复杂系统任务可靠性框图

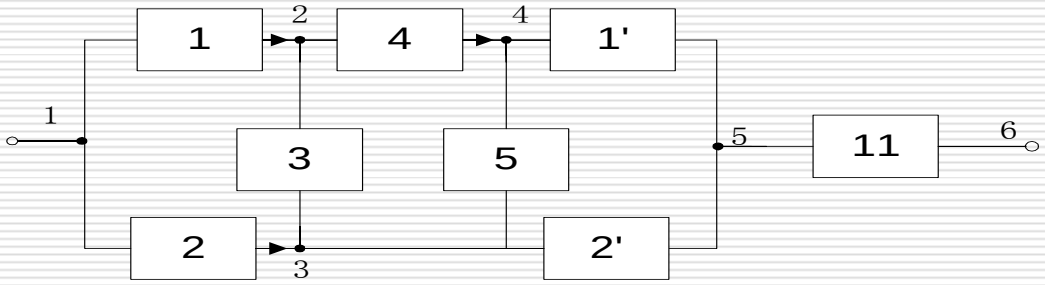


图3-24 简化后的系统任务可靠性框图

假设：组成系统的各单元的寿命服从故障率为 λ 的指数分布。

(1) 全概率分解法

- 系统中任一单元正常这一事件，与其逆事件（单元故障）一起，构成完备事件组。利用概率论中的全概率公式，可以将非串并联的复杂网络分解简化，经多次分解简化后，可将复杂网络简化成简单的串并联系统，从而计算出系统的可靠度。这个分解过程称为全概率分解。用数学符号表示为：

$$R_s(t) = P(S) = P(x)P(S \mid x) + P(\bar{x})P(S \mid \bar{x})$$

式中：
$R_s(t)$ —— 系统的可靠度；
$P(S)$ —— 网络S正常的概率；
$P(x)$ —— 单元x正常的概率；
$P(\bar{x})$ —— 单元x故障的概率；
$P(S \mid x)$ —— 在单元x正常的条件下，网络S正常的概率；
$P(S \mid \bar{x})$ —— 在单元x故障的条件下，网络S正常的概率；

(1) 全概率分解法 (续)

- 令：
  - $S(x)$表示把网络S中单元x的两端节点合成一个节点而产生的新网络；
  - $S(\bar{x})$ 表示把网络S中单元x去掉（即两个端点之间不存在经由x的联系）而产生的新网络
- 如果满足：

$$P(S \mid x) = P(S(x))$$

$$P(S \mid \bar{x}) = P(S(\bar{x}))$$

则全概率分解公式可变为：

$$R_s(t) = P(S) = P(x)P(S(x)) + P(\bar{x})P(S(\bar{x}))$$

如此经过多次分解可以使产生的子网络成为一般的串并联系统，从而可以逐步地计算出网络S的可靠度。

全概率分解的规则

- 全概率分解的一个关键步骤是选择分解单元（不产生新的通道）
  - i 任一无向单元都可以作为分解单元；
  - ii 任一有向单元，若其两端节点中有一个节点只有流出连线（或只有流入连线）则可作为分解单元；
    - 与网络输入或输出节点相连的单元可以作为分解单元，因为这些单元满足前述条件。

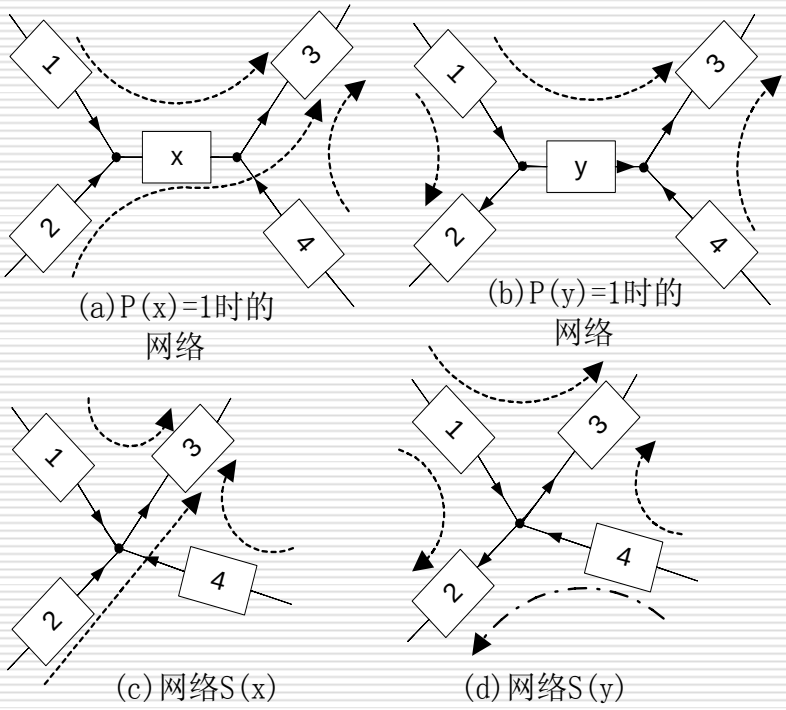


图3-25 分解单元的选取

全概率分解的规则（续）

- 分解过程中产生的无用单元及其组合（如悬挂环、输出节点流向输入节点的逆向单元等）可以去掉
- 选择最佳分解单元可以减少分解步骤，更快地建立系统的可靠性数学模型。最佳分解单元的选择需要一定的经验。

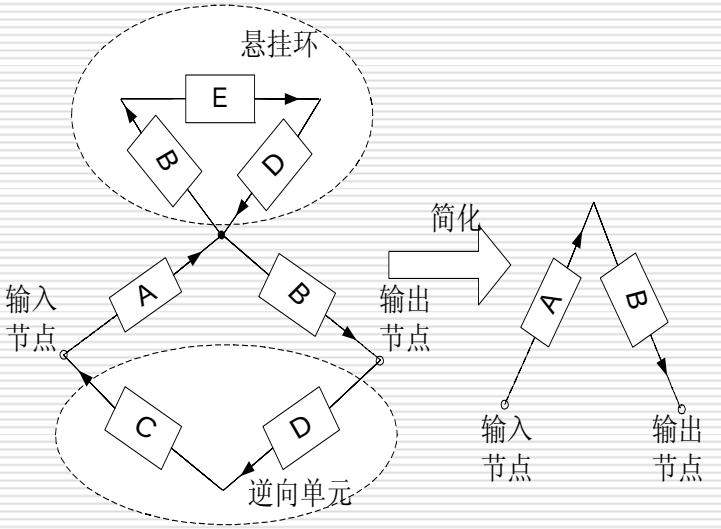


图3-26 全概率分解产生的无用单元示例

- P.38 〔例3-4〕

（2）最小路集法

1. 路集和最小路集

- 路集是可靠性框图中一些方框的集合，当集合内的方框都正常时，系统处于正常状态。
  - 路集中增加一个方框后仍然是路集
  - 系统可靠性框图中所有方框的全集合必然是路集
- 若某路集中任意去掉一个方框后剩下的集合不再是路集，该路集就是最小路集。
  - 最小路集中包含的方框数称为路长。
  - 在最小路集中，既没有重复的方框，其所形成的通路也没有重复的节点。因此，具有n个节点的可靠性框图的最小路集的最大路长为$n-1$。

2. 求所有最小路集的方法

- 联络矩阵法
- 网络遍历法

需采用计算机辅助实现，已成为求解所有最小路集的主要手段。

用最小路集建立系统任务可靠度模型

- 系统任务可靠性框图的所有最小路集为：

$$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_m$$

- 系统正常意味着至少有一个最小路集存在，设系统正常这一事件为S，则有：

$$S = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$$

- 第i个最小路集存在，意味着该路集中的每个方框均正常，用x_{ij}表示集合i中的第j个元素，则有：

$$A_i = \bigcap_{x_{ij} \in A_i} x_{ij}$$

用最小路集建立系统任务可靠度模型（续）

- 利用相容事件的概率公式可以建立系统任务可靠度的数学模型为：

$$R_s = P(S) = P(\bigcup_{i=1}^{m} A_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} P(A_i) - \sum_{i<j=2}^{m} P(A_i \bigcap A_j) + \sum_{i<j<k=3}^{m} P(A_i \bigcap A_j \bigcap A_k)$$

$$+ \cdots + (-1)^{m-1} P(\bigcap_{i=1}^{m} A_i)$$

- 注意：在利用最小路集建立系统任务可靠度数学模型时，存在着计算量随网络规模指数增长的问题。可以采用对最小路集进行不交化等方法进行求解，以达到简化计算的目的。

联络矩阵

给定一个任一类型的网络系统，它有n个节点，节点编号为1，2，…，n。

定义联络矩阵为：

$$C = [C_{ij}]$$

- 式中C_{ij}为矩阵元素，其定义如下：

$$C_{ij} = \begin{cases} x & \text{节点 } i \text{ 到 } j \text{ 间有单元}x\text{直接相连} \\ 0 & \text{节点 } i \text{ 到 } j \text{ 间无单元直接相连} \end{cases}$$

联络矩阵的乘方规则

- 联络矩阵C的平方 $\mathbf{C}^2 = \left[C_{ij}^{(2)}\right] \quad i, j = 1,2,\cdots,n$

$$C_{ij}^{(2)} = \bigcup_{k=1}^{n} C_{ik} \bigcap C_{kj}$$

  - 其中，n为网络中的节点数。
  - $C_{ij}^{(2)}$的含义：从节点i到所有可能的节点k，再从节点k到节点j的所有最小路集。即从节点i到节点j的路长为2的所有最小路集。因此$C_{ij}^{(2)}$中路长小于2的要去掉。
- 联络矩阵C的r次方 $\mathbf{C}^r = \mathbf{C} \times \mathbf{C}^{r-1} = \left[C_{ij}^{(r)}\right] \quad r = 2,3,\cdots,n-1$

$$C_{ij}^{(r)} = \bigcup_{k=1}^{n} C_{ik} \bigcap C_{kj}^{(r-1)}$$

  - 其中，n为网络中的节点数。
  - $C_{ij}^{(r)}$的含义：从节点i到节点j的路长为r的所有最小路集。因此$C_{ij}^{(r)}$中路长小于r的要去掉。由于具有n个节点的网络的最小路集的最大路长为n-1，因此对于$r \geqslant n$，必有$\mathbf{C}^r = [0]$ 。

联络矩阵的乘方规则(续)

- 由于研究的是从输入节点 I 到输出节点 L 的可靠性，所以只需要求出“输入→输出”两个端点之间的所有最小路集。
  - 只需求出 C^2、C^3、……、C^{n-1} 中的第 L 列，即：
    - 其中 $[C]_L^{n-1}$ 只需求出第 I 行元素即可。

$$[C]_L^2, [C]_L^3, \cdots, [C]_L^{n-1}$$

- P.40 [例3-5]

大型网络系统最小路集的计算机算法

- 当网络中节点数 n 很大时，联络矩阵往往很大且是稀疏阵，因此用联络矩阵法求最小路集时要大容量存储及“冗余”计算。故需要高效的计算机算法来求所有最小路集。
- 所用算法基于广义的网络拓扑
  - 无向网络的输入节点和输出节点可以随意但必须分别指定；
  - 有向网络（无悬挂环、逆向单元）：
    - 输入节点：无输入弧；
    - 输出节点：无输出弧。

大型网络系统最小路集的计算机算法(续)

1. 问题描述

设G是有n个节点的有向网络（对无向网络可以看成双向的，故无向网络亦可化为有向网络）。假定节点之间无并联弧，输入节点为I，输出节点为L，如何找出I、L之间的所有最小路集。

2. 算法思想

整个算法的基本思想可描述如下：

（1）输入节点I作为起始节点；

（2）由起始节点出发，依次选下一步可达的节点i；

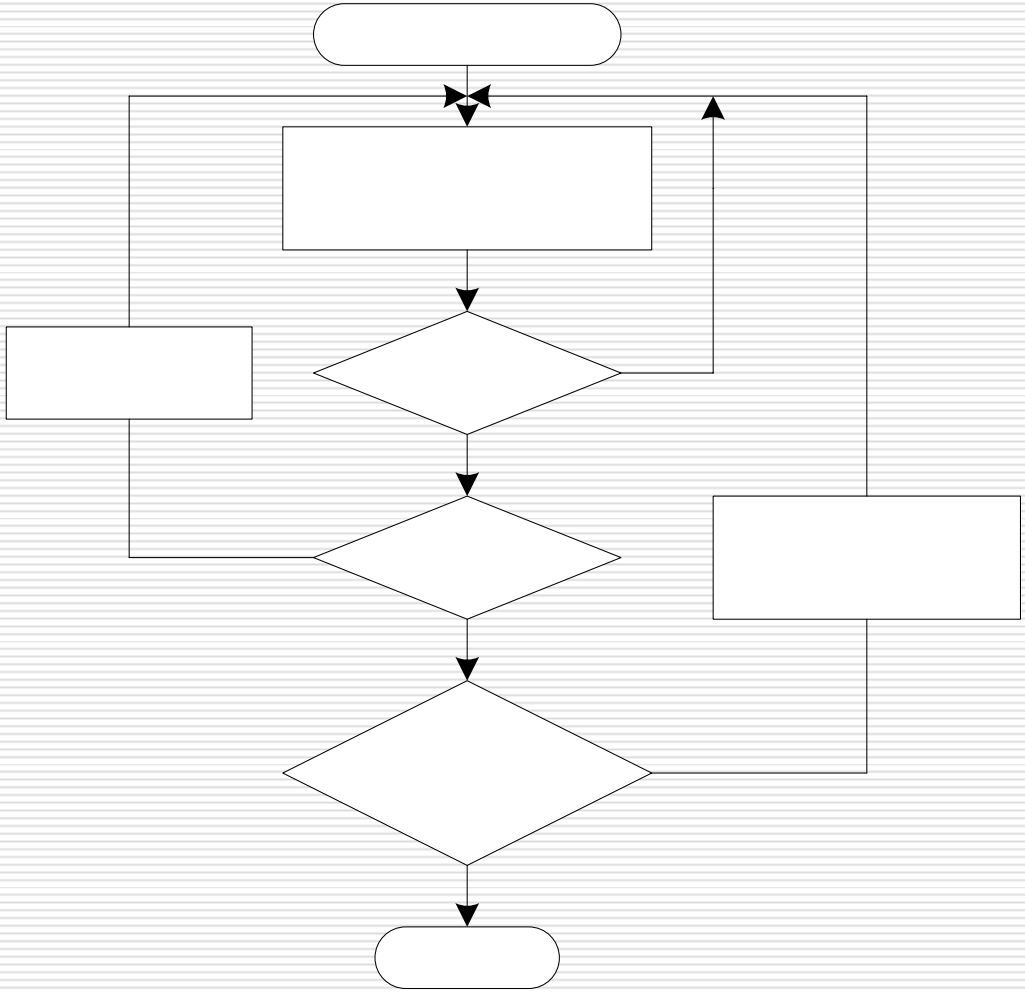
（3）判断所选节点i是否走过，若是，则退回起始节点，转（2）；

（4）判断是否已达到输出节点L，若否，则把i作为起始节点，转（2）；

（5）判断是否已找到了所有最小路集，如否，则退后一步，把上个节点作为起始节点，转（2）；

（6）结束。

求最小路集算法的功能流程图



选I为起

由起始点选
达节

以i为起始点

是否走

3。算法参数和符号

n：网络中节点数；

I：输入节点标号；

L：输出节点标号；

E：扇出向量；$E = (E_1, \ldots, E_i, \ldots, E_n)$，表示离开节点1，…，$n$的弧数。其中$E_i$表示节点$i$下一步可以到达的节点有$E_i$个。$E$向量完全由网络所确定。

$\boldsymbol{R}$：路线阵；$\boldsymbol{R} = (r(i, k))$

其中$i = 1, \ldots, n$；$k = 1, \ldots, E_i$。

$\boldsymbol{R}$的第i行记录了节点i可以一步到达的节点标号。$\boldsymbol{R}$不一定是长方阵，即对不同的行，列数未必相同。为了表示i的下一步的节点已经完全走遍，同时区分出输入节点I，在$\boldsymbol{R}$的每行再增加一个元素

$$r(i, E_i + 1) = \begin{cases} -1 & i = I \\ 0 & i \neq I \end{cases}$$

此时称$\boldsymbol{R}$为G路线阵。显然，$\boldsymbol{R}$阵完全由网络所确定。

3。算法参数和符号（续）

C：位置向量；$\boldsymbol{C} = (C_1, \ldots, C_j, \ldots, C_n)$，其中$C_j$记录节点$j$下一步将访问的节点在**R**中的列号。而元素$r(j, C_j)$记录$j$下一步到达的节点标号。

F：检验向量；**F**为定义在节点{1，2，…，n}上的函数，初值为

$$F(j) = \begin{cases} 1 & j = I \\ -1 & j = L \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

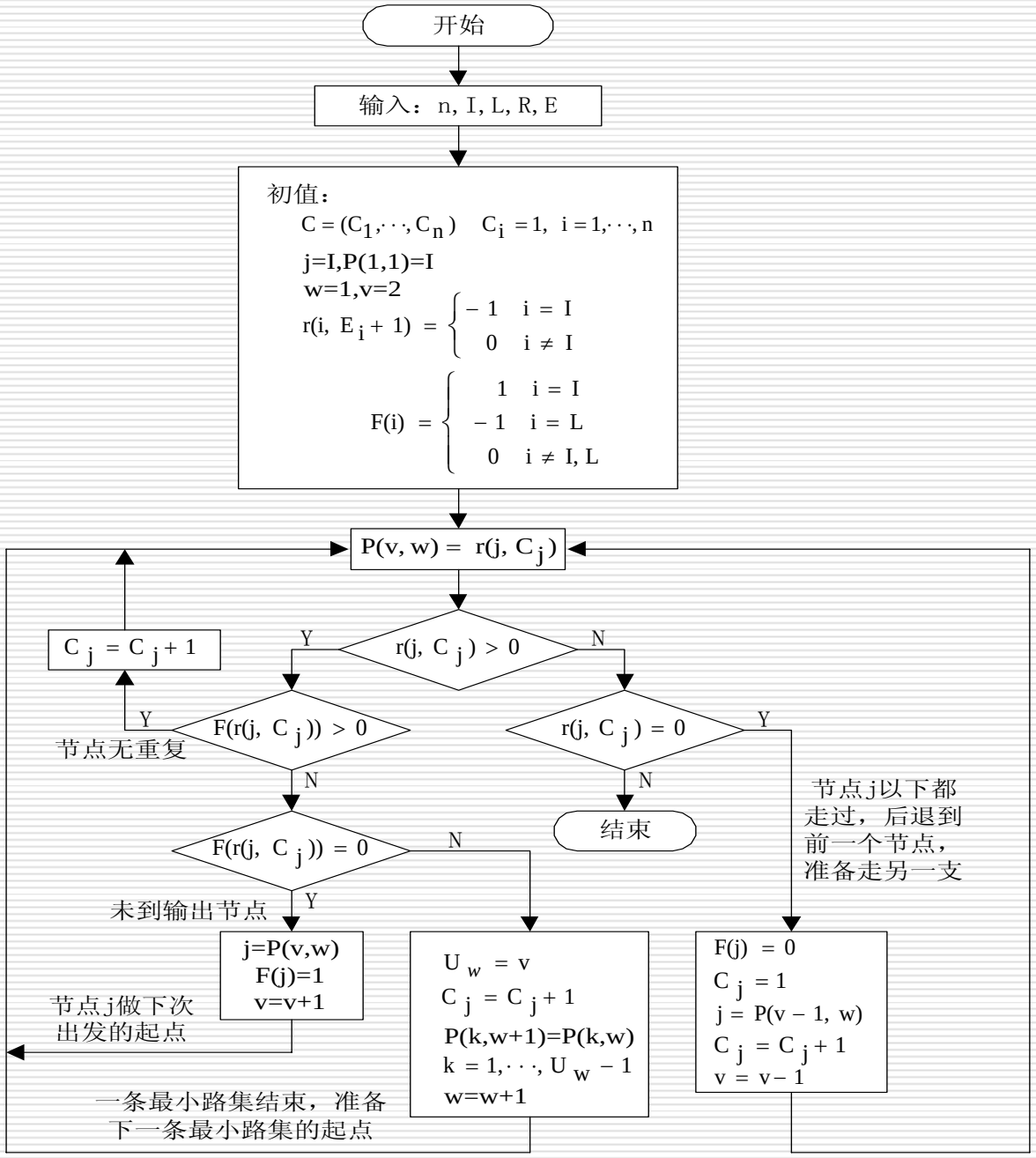
F的作用为：当某个节点j已走过时，$F(j)$的值就为1。在寻找一条最小路集的过程中，这可以用来判断后面的节点是否与已走过的节点有重复。一旦$F(j) = -1$，表明已达到输出节点L，即找到了一条最小路集。

P：输出矩阵；所有最小路集组成的矩阵，其中每一列为由输入节点I到输出节点L的一条最小路集。**P**的元素$P(v, w)$记录了第w条最小路集中第v个节点的标号。

U_w：记录第w条最小路集中的节点数，它在事先未知。

4。算法的数据流程图

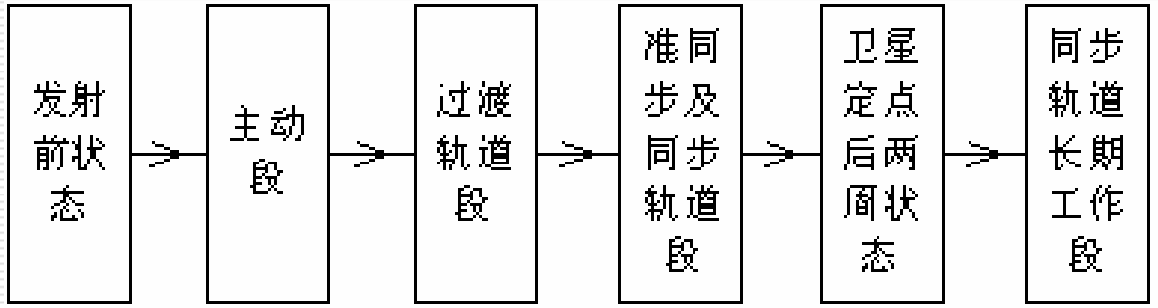
- 输入：
  - 网络节点数 n
  - 输入节点标号 I
  - 输出节点标号 L
  - 扇出向量 E
  - 路线阵 R
- 若某一步走到节点 j，$r(j,C_j)$ 是其后要走的节点标号。
  - 若 $r(j,C_j)=0$，则表明节点 j 以后的所有分支都已走过。此时应由 j 倒退一个节点，即由 j 前面的一个节点再往下探索。
  - 若 $r(j,C_j)>0$，$F(r(j,C_j))=0$，表明节点无重复，且未到输出节点 L；
  - $r(j,C_j)>0$，$F(r(j,C_j))=-1$，表明一条最小路集已找到。
  - 一旦 $r(j,C_j)<0$，表明由输入节点 I 出发，I 所有下一步能达到的节点都已走遍，即意味着已求得所有最小路集。此时算法终止。



求最小路集的数据流程图

系统可靠性模型示例

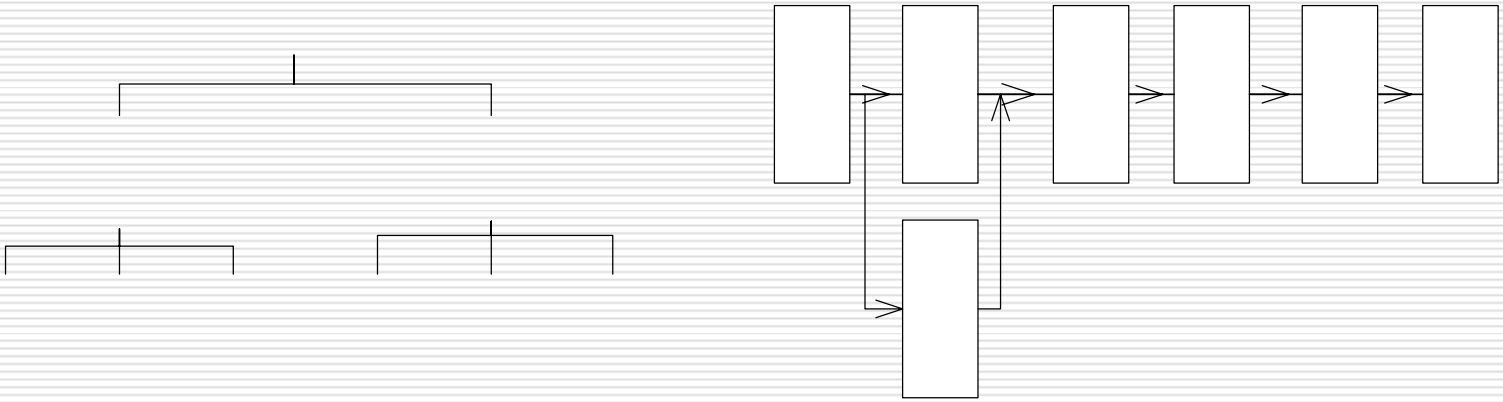
- 产品定义
  - 系统组成：数据转发、天线、控制、测控、电源、远地点发动机、热控、结构等分系统。
  - 任务及任务剖面：从发射至轨道工作过程中，经历了六个阶段



系统可靠性模型示例

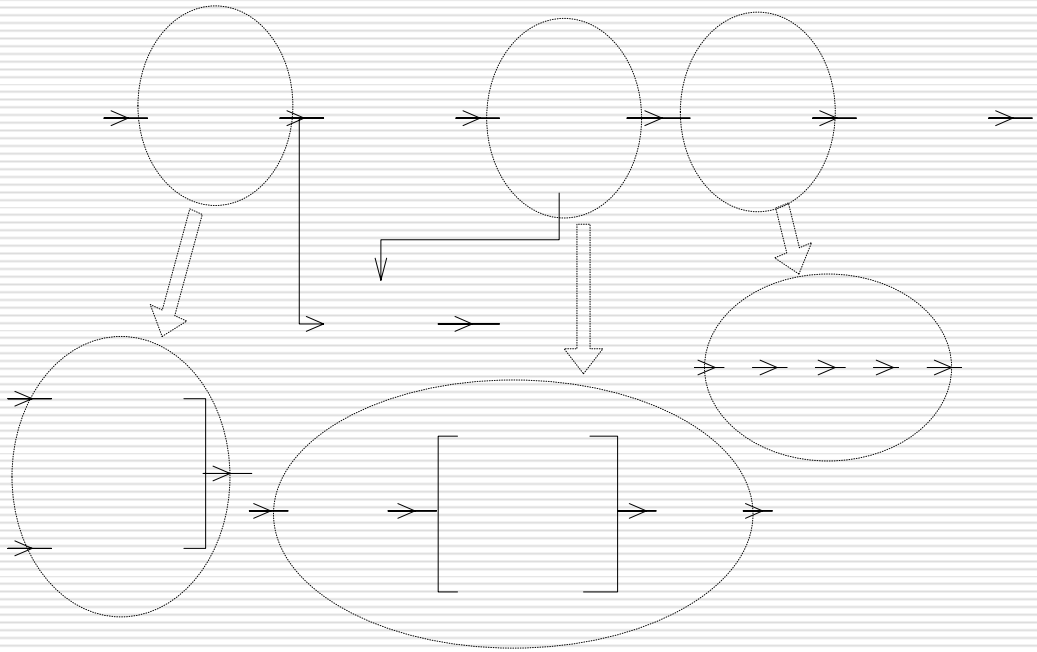
功能分析_过渡轨道段

- 远地点发动机工作
- 远地点发动机工作的任务是：遥控指令启动远地点发动机点火，发动机推进数十秒后，把卫星送入准同步轨道。
- 远地点发动机的组成（其安全点火机构采用双点火头形式）



系统可靠性模型示例

- 功能分析_准同步及同步轨道段
  - 二次分离段
    - 进入准同步轨道状态后，将远地点发动机抛离卫星本体。其功能流程图如图所示。
  - 卫星定点段
    - 二次分离后，卫星从准同步轨道上开始十余天的漂移，然后定点在同步轨道上。

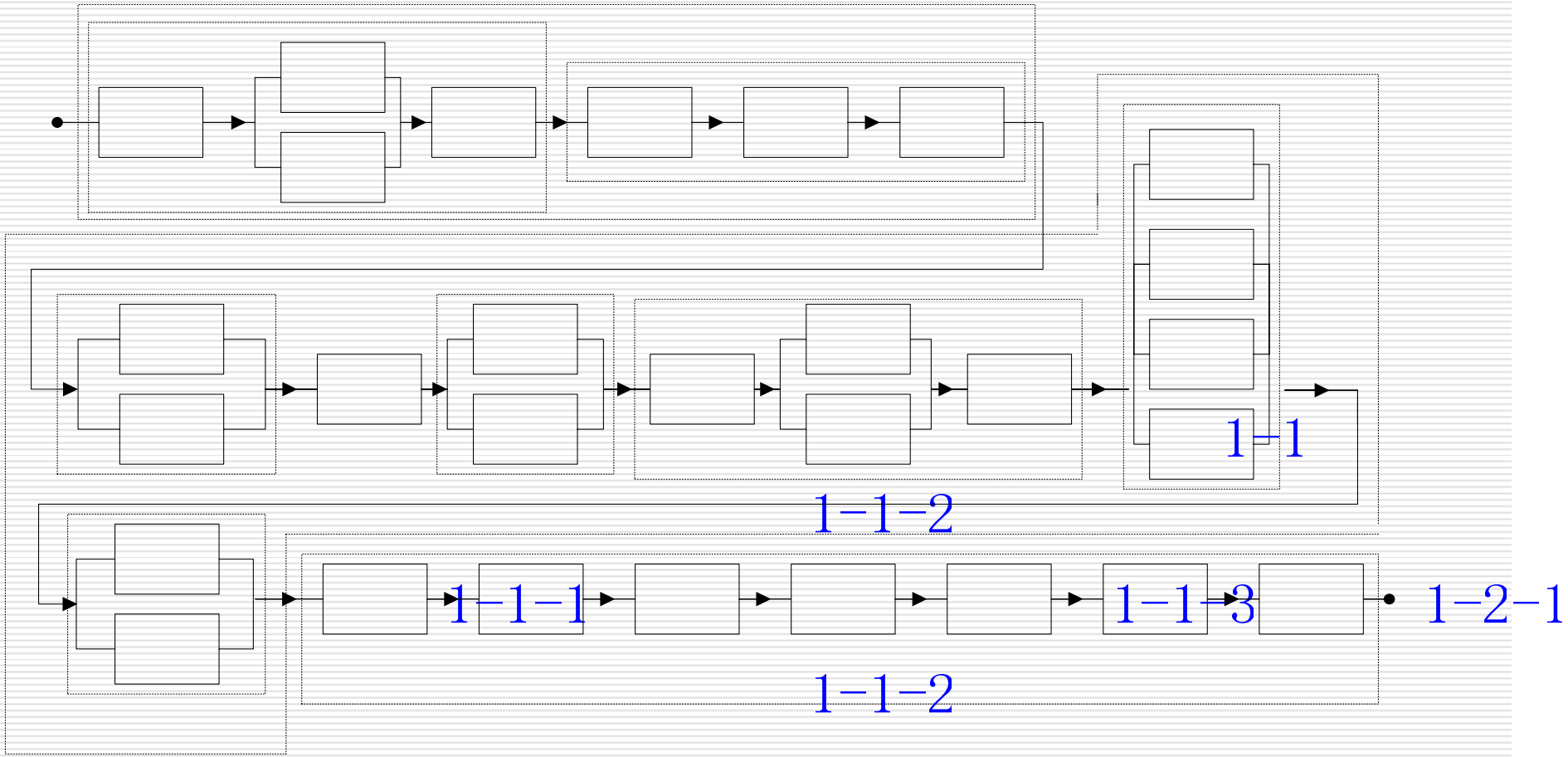


系统可靠性模型示例

- 故障定义
  - 当一次分离（弹星分离）成功后，凡影响卫星定点任务完成的事件都是故障事件。
- 时间基准

系统可靠性模型示例

建立系统可靠性框图



2-1 2-3

系统可靠性模型示例

建立系统任务可靠性数学模型

$$R_s = R_1 R_2 R_3$$

$$= R_{1-1}R_{1-2}R_{2-1}R_{2-2}R_{2-3}R_{2-4}R_{2-5}R_{2-6}R_{3-1}R_{3-2}R_{3-3}R_{3-4}R_{3-5}R_{3-6}R_{3-7}$$

$$= R_{1-1-1}(1-(1-R_{1-1-2})^2)R_{1-1-3}R_{1-2-1}R_{1-2-2}R_{1-2-3}$$

$$(1-(1-R_{2-1-1})^2)R_{2-2}$$

$$(1-(1-R_{2-3-1})(1-R_{2-3-2}))R_{2-4-1}$$

$$(1-(1-R_{2-4-2})^2)R_{2-4-3}(1-(1-R_{2-5-1})^4)$$

$$(1-(1-R_{2-6-1})(1-R_{2-6-2}))R_{3-1}R_{3-2}R_{3-3}R_{3-4}R_{3-5}R_{3-6}R_{3-7}$$

建模工作的注意事项

- 建模工作的注意事项
  - 逐步细化、逐级展开
  - 时间基准与占空因子
  - 任务剖面