可靠度技術手冊

韋伯分佈可靠度評估技術

彭鴻霖　編著

中華民國八十九年十二月十八日

韋伯分佈可靠度評估技術

目　錄

韋伯分佈可靠度評估技術

1 前言

韋伯分佈是一種很重要的壽命分佈類型，許多電子與機械產品，其壽命通常都可以用韋伯分佈來描述。

2 分佈特性

韋伯分佈是W. Weibull先生在研究金屬材料疲勞壽命時所發現的機率分佈，一般記為wei(t；m, η)，其機率密度函數$f_T(t)$、累積分佈函數$F_T(t)$、可靠度函數$R(t)$、及失效率函數$h(t)$，分別說明如下：

$$f_T(t)=\frac{m}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{m-1}\exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{m}\right],\quad 0<t<\infty,\ 0<m,<\eta \tag{1}$$

$$F_T(t)=1-\exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{m}\right] \tag{2}$$

$$\begin{aligned}[\mu_L,\mu_U]&=\left[\bar{x}-z_{(1+\gamma)/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+z_{(1+\gamma)/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]\\&=[1.005-0.18,1.005+0.18]\\&=[9.87,10.23]\end{aligned} \tag{3}$$

由上式可求得失效率函數為：

$$h(t)=\frac{f_T(t)}{R(t)}=\frac{m}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{m-1} \tag{4}$$

m為形狀參數，決定分佈的形狀，η為尺度參數，與平均壽命有關。當$m<1$時，失效率隨時間增加而減少，$f_T(t)$、$R(t)$呈初期失效型分佈；當$m=1$時，失效率為一定值，不隨時間變化，韋伯分佈與前述指數分佈相同；當$m>1$時，失效率隨時間增加而增加，屬於磨耗型失效分佈；當$m=2$時，韋伯分佈的$f_T(t)$接近對數常態佈；當$m=4$時，韋伯分佈的機率密度函數$f_T(t)$接近常態分佈。選擇適當的m值，韋伯分佈可以符合包括初期失效期、偶發失效期及磨耗失效期等三個階段的全領域失效分佈，同時也可以近似對數常態分佈及常態分佈，因此，韋伯分佈適於描述很多的可靠度數據。圖1為$m=0.25$、1、2及4，$\eta=1$時的$f_T(t)$、$R(t)$及$h(t)$。

由函數的形式可知，韋伯分佈是將指數分佈一般化，另一方面可從表示最小值或最大值之極值分佈推導出韋伯分佈，亦即韋伯分佈可視為很多隨機變數最小值的漸近分佈，產品失效起因於產品的最弱處，所以，極值分佈之一的韋伯分佈很符合實際產品的失效數據，熱點（熱集中）或電場集中所引致的電子零件失效、應力集中所引致的金屬材料裂紋成長及破壞等為其例。

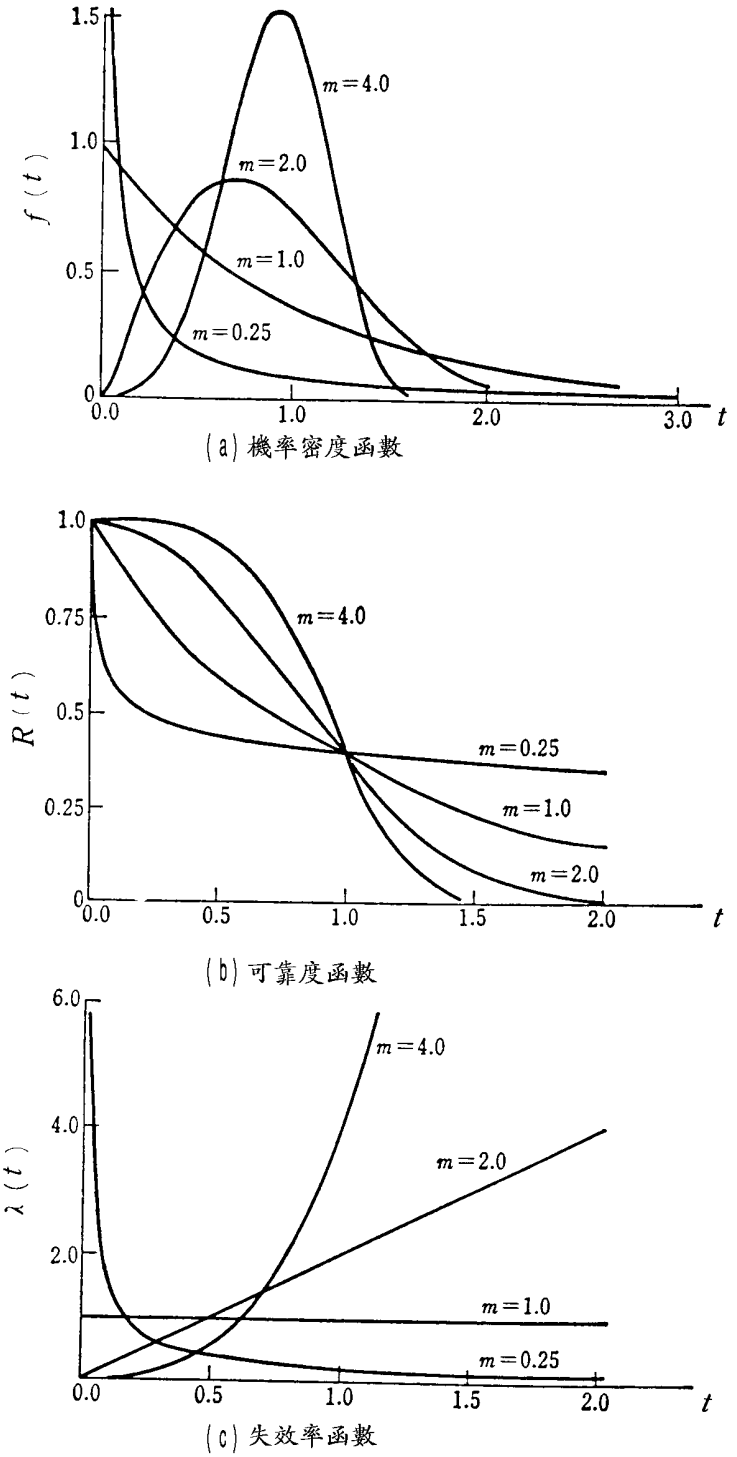


圖 1： 韋伯分佈（η＝1）之機率密度函數、可靠度函數及失效率函數曲線

韋伯分佈的平均值與變異數分別為：

$$E[T] = \int_0^{\infty} t\, f_T(t)\, dt = \eta\Gamma\left(1+\frac{1}{m}\right) \tag{5}$$

$$V[T] = \int_0^{\infty} t^2 f_T(t)\, dt = \eta^2\left\{\Gamma\left(1+\frac{2}{m}\right)-\Gamma^2\left(1+\frac{1}{m}\right)\right\} \tag{6}$$

η 又稱為特性壽命(characteristic life)，可衡量平均壽命，當 $t=\eta$ 時，可靠度為37 %，η 相當於指數分佈的平均壽命。

當 m 大於 1 時，可假設 $\Gamma[1+1/m] \quad 1$，故成

$$\mu \approx \eta$$

以上是認為開始觀測後，總會發生失效，不過，實際上，有時在某一段期間中看不出失效，例如在樹脂密封式零件，空氣中的水分在樹脂中擴散，與內部的元件反應，使零件特性劣化時，水分在樹脂中擴散而達到元件前，看不出失效，此時，上述有關失效分佈的各個函數須導入開始失效前的時間 ζ。導入 ζ 後的韋伯分佈機率密度函數成為：

$$f_T(t) = \frac{m}{\eta-\varsigma}\left(\frac{t-\varsigma}{\eta-\varsigma}\right)^{m-1} \exp\left[-\left(\frac{t-\varsigma}{\eta-\varsigma}\right)^m\right] \tag{7}$$

ζ 稱為位置參數，實用上，有時稱 ζ 為保證期間或無失效時間。

3 參數推定

3.1 最佳線性無偏推定(BLUE)

假設某產品的壽命 T 服從韋伯分佈，其累積分佈函數為：

$$F_T(t) = 1-\exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^m\right], \quad t>0$$

式中尺度參數 $\eta>0$ 為特徵壽命，形狀參數 $m>0$。

一般直接計算η與m的推定值比較困難，取壽命T的對數轉換值，即$X=\ln T$，其參數推定則較為容易求得。經轉換後的隨機變數X為極值分佈，其累積分佈函數為：

$$F_X(x)=1-\exp\left[-\exp\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right],\quad -\infty<x<+\infty$$

式中位置參數μ與尺度參數σ和原始分佈的尺度參數η與形狀參數m間的關係如下：

$$\mu=\ln\eta$$
$$\sigma=\frac{1}{m}$$

將隨機變數X再作如下的標準化轉換為隨機變數Y：

$$Y=\frac{X-\mu}{\sigma}$$

則Y為無參數之標準極值分佈，其累積分佈函數為：

$$F_Y(y)=1-\exp[-\exp(y)],\quad -\infty<y<+\infty$$

從群體為標準極值分佈，抽取樣本數為n，若循序前面r個的觀測結果為已知，根據次序統計量理論，利用高斯-馬爾可夫定理，可得到極值分佈參數的推定值分別為：

$$\hat{\mu}=\sum_{k=1}^{r}D(n,r,k)\,X_k$$

$$\hat{\sigma}=\sum_{k=1}^{r}C(n,r,k)\,X_k$$

其中$D(n,r,k)$與$C(n,r,k)$稱為最佳線性無偏推定係數，為與樣本觀測無關的係數，已有人分別就給定的n、r、k值計算並製作成表單，如附表1所示。在應用時可直接由這些表單中就已知的參數查得。再經過變數轉換，可得韋伯參數分別為：

$$\hat{\eta}=\exp(\hat{\mu})$$
$$\hat{m}=\frac{1}{\hat{\sigma}}$$

附表 1：韋伯分佈最佳線性無偏推定係數

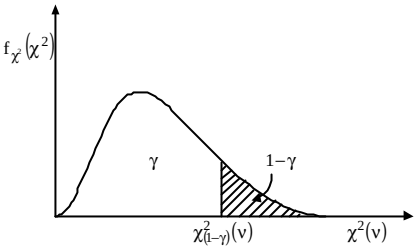
n	r	k	D(n,r,k)	C(n,r,k)	n	r	k	D(n,r,k)	C(n,r,k)
2	2	1	0.0836	-0.7213	7	2	1	-1.3383	-0.9267
		2	0.9164	0.7213			2	2.3383	0.9267
						3	1	-0.4036	-0.4550
3	2	1	-0.3777	-0.8221			2	-0.3012	-0.4056
		2	1.3777	0.8221			3	1.7048	0.8605
	3	1	0.0880	-0.3747		4	1	-0.1463	-0.2940
		2	0.2557	-0.2558			2	-0.0941	-0.2760
		3	0.6563	0.6305			3	-0.0071	-0.2102
							4	1.2475	0.7802
4	2	1	-0.7063	-0.8690		5	1	-0.0393	-0.2110
		2	1.7063	0.8690			2	-0.0044	-0.2065
	3	1	-0.0801	-0.4144			3	0.0458	-0.1691
		2	0.0604	-0.3259			4	0.1134	-0.0992
		3	1.0197	0.7403			5	0.8844	0.6858
	4	1	0.0714	-0.2488		6	1	0.0137	-0.1587
		2	0.1537	-0.2239			2	0.0418	-0.1609
		3	0.2639	-0.0859			3	0.0757	-0.1396
		4	0.5110	0.5586			4	0.1176	-0.0951
							5	0.1721	-0.0176
5	2	1	-0.9599	-0.8963			6	0.5791	0.5719
		2	1.9599	0.8963		7	1	0.0418	-0.1201
	3	1	-0.2101	-0.4343			2	0.0673	-0.1259
		2	-0.0860	-0.3642			3	0.0937	-0.1149
		3	1.2961	0.7986			4	0.1232	-0.0873
	4	1	-0.0154	-0.2730			5	0.1586	-0.0362
		2	0.0520	-0.2499			6	0.2063	0.0607
		3	0.1521	-0.1491			7	0.3090	0.4237
		4	0.8113	0.6721					
	5	1	0.0584	-0.1845	8	2	1	-1.4869	-0.9361
		2	0.1088	-0.1817			2	2.4869	0.9361
		3	0.1676	-0.1305		3	1	-0.4794	-0.4616
		4	0.2463	-0.0065			2	-0.3848	-0.4180
		5	0.4189	0.5031			3	1.8642	0.8790
						4	1	-0.1977	-0.2998
6	2	1	-1.1656	-0.9141			2	-0.1502	-0.2837
		2	2.1656	0.9141			3	-0.0685	-0.2275
	3	1	-0.3154	-0.4466			4	1.4164	0.8109
		2	-0.2034	-0.3886		5	1	-0.0781	-0.2172
		3	1.5188	0.8353			2	-0.0474	-0.2128
	4	1	-0.0865	-0.2859			3	-0.0001	-0.1803
		2	-0.0281	-0.2655			4	0.0637	-0.1225
		3	0.0649	-0.1859			5	1.0619	0.7328
		4	1.0496	0.7372		6	1	-0.0172	-0.1661
	5	1	0.0057	-0.2015			2	0.0065	-0.1675
		2	0.0466	-0.1973			3	0.0380	-0.1483
		3	0.1002	-0.1536			4	0.0780	-0.1105
		4	0.1723	-0.0646			5	0.1292	-0.0500
		5	0.6752	0.6170			6	0.7655	0.6424
	6	1	0.0489	-0.1458		7	1	0.0168	-0.1303
		2	0.0835	-0.1495			2	0.0376	-0.1348
		3	0.1211	-0.1267			3	0.0612	-0.1238
		4	0.1656	-0.0732			4	0.0888	-0.0991
		5	0.2255	0.0360			5	0.1225	-0.0571
		6	0.3554	0.4593			6	0.1655	0.0109

附表 1：韋伯分佈最佳線性無偏推定係數

n	r	k	D(n,r,k)	C(n,r,k)	n	r	k	D(n,r,k)	C(n,r,k)
8	7	7	0.5076	0.5343	10	2	1	-1.7333	-0.9491
	8	1	0.0365	-0.1019			2	2.7333	0.9491
		2	0.0561	-0.1081		3	1	-0.6047	-0.4693
		3	0.0759	-0.1027			2	-0.5223	-0.4351
		4	0.0971	-0.0872			3	2.1270	0.9044
		5	0.1212	-0.0589		4	1	-0.2827	-0.3073
		6	0.1502	-0.0111			2	-0.2421	-0.2941
		7	0.1894	0.0758			3	-0.1691	-0.2406
		8	0.2735	0.3942			4	1.6938	0.8520
						5	1	-0.1426	-0.2251
9	2	1	-1.6173	-0.9434			2	-0.1175	-0.2210
		2	2.6173	0.9434			3	-0.0748	-0.1953
	3	1	-.05458	-0.4656			4	-0.0174	-0.1523
		2	-0.4577	-0.4275			5	1.3523	0.7937
		3	2.0035	0.8932		6	1	-0.0690	-0.1748
	4	1	-0.2427	-0.3040			2	-0.0506	-0.1754
		2	-0.1990	-0.2895			3	-0.0226	-0.1596
		3	-0.1219	-0.2405			4	0.0141	-0.1308
		4	1.5639	0.8340			5	0.0602	-0.0883
	5	1	-0.1123	-0.2217			6	1.0680	0.7290
		2	-0.0847	-0.2174		7	1	-0.0261	-0.1406
		3	-0.0398	-0.1887			2	-0.0109	-0.1437
		4	0.0206	-0.1394			3	0.0095	-0.1340
		5	1.2161	0.7673			4	0.0348	-0.1143
	6	1	-0.0446	-0.1712			5	0.0659	-0.0838
		2	-0.0239	-0.1720			6	0.1041	-0.0402
		3	0.0057	-0.1547			7	0.8227	0.6565
		4	0.0440	-0.1220		8	1	0.0006	-0.1153
		5	0.0925	-0.0721			2	0.0143	-0.1198
		6	0.9264	0.6920			3	0.0305	-0.1142
	7	1	-0.0058	-0.1364			4	0.0493	-0.1006
		2	0.0118	-0.1400			5	0.0714	-0.0785
		3	0.0336	-0.1297			6	0.0979	-0.0460
		4	0.0600	-0.1076			7	0.1307	0.0009
		5	0.0922	-0.0723			8	0.6054	0.5735
		6	0.1325	-0.0194		9	1	0.0178	-0.0953
		7	0.6757	0.6055			2	0.0309	-0.1005
	8	1	0.0178	-0.1102			3	0.0446	-0.0978
		2	0.0340	-0.1154			4	0.0596	-0.0886
		3	0.0516	-0.1097			5	0.0763	-0.0727
		4	0.0714	-0.0950			6	0.0957	-0.0486
		5	0.0943	-0.0700			7	0.1188	-0.0129
		6	0.1218	-0.0312			8	0.1481	0.0415
		7	0.1569	0.0292			9	0.4082	0.4749
		8	0.4523	0.5024		10	1	0.0289	-0.0779
	9	1	0.0323	-0.0884			2	0.0417	-0.0836
		2	0.0480	-0.0944			3	0.0542	-0.0828
		3	0.0634	-0.0920			4	0.0670	-0.0770
		4	0.0796	-0.0827			5	0.0806	-0.0661
		5	0.0972	-0.0656			6	0.0956	-0.0487
		6	0.1174	-0.0380			7	0.1129	-0.0222
		7	0.1418	0.0065			8	0.1338	0.0192
		8	0.1749	0.0852			9	0.1623	0.0912
		9	0.2455	0.3692			10	0.2229	0.3478

附表 2: 卡方分佈分位數表

$$\Pr\left\{\chi^2 \geq \chi^2_{(1-\gamma)}\right\} = 1-\gamma$$



ν \ α	0.99	0.95	0.90	0.80	0.50	0.20	0.10	0.05	0.01	ν \ α
1	0.0^3157	0.0^2393	0.0158	0.0642	0.455	1.642	2.706	3.841	3.626	1
2	0.0201	0.103	0.211	0.446	1.386	3.219	4.605	5.991	9.210	2
3	0.115	0.352	0.584	1.005	2.366	4.642	6.251	7.815	11.345	3
4	0.297	0.711	1.064	1.649	3.357	5.989	7.779	9.488	12.277	4
5	0.554	1.145	1.610	2.343	4.351	7.289	9.236	11.070	15.068	5
6	0.872	1.635	2.204	3.070	5.348	8.558	10.645	12.592	16.812	6
7	1.239	2.167	2.833	3.822	6.346	9.803	12.017	14.067	18.475	7
8	1.646	2.733	3.490	4.594	7.344	11.030	13.362	15.507	20.090	8
9	2.088	3.325	4.168	5.380	8.343	12.242	14.634	16.919	21.666	9
10	2.558	3.940	4.865	6.179	9.342	13.442	15.987	18.307	23.209	10
11	3.053	4.575	5.578	6.989	10.341	14.631	17.275	19.675	24.725	11
12	3.571	5.226	6.304	7.807	11.340	15.812	18.549	21.026	26.217	12
13	4.107	5.892	7.042	8.634	12.340	16.985	19.812	22.362	27.688	13
14	4.660	6.571	7.790	9.467	13.339	18.151	21.064	23.635	29.141	14
15	5.229	7.261	8.547	10.307	14.339	19.311	22.307	24.996	30.578	15
16	5.812	7.962	9.312	11.152	15.338	20.465	23.542	26.296	32.000	16
17	6.408	8.672	10.85	12.002	16.338	21.615	24.769	27.587	33.409	17
18	7.015	9.390	10.865	12.857	17.338	22.760	25.989	28.869	34.805	18
19	7.633	10.117	11.651	13.716	18.338	23.900	27.204	30.144	36.191	19
20	8.260	10.851	12.443	14.578	19.337	25.038	28.412	31.410	37.566	20
21	8.897	11.591	13.240	15.445	20.337	26.171	29.615	32.671	38.932	21
22	9.542	12.338	14.041	16.314	21.337	27.301	30.813	33.924	40.289	22
23	10.196	13.091	14.848	17.187	22.337	28.429	32.007	35.172	41.638	23
24	10.856	13.848	15.659	18.062	23.337	29.553	33.196	36.415	42.980	24
25	11.524	14.611	16.473	18.940	24.337	30.675	34.382	37.652	44.314	25
26	12.198	15.379	17.292	19.820	25.336	31.795	35.563	38.885	45.642	26
27	12.879	16.151	18.114	20.703	26.336	32.912	36.741	40.113	46.963	27
28	13.565	16.928	18.939	21.588	27.336	34.027	37.916	41.337	48.278	28
29	14.256	17.708	19.768	22.475	28.336	35.139	39.087	42.557	49.588	29
30	14.953	18.493	20.599	23.364	29.336	36.250	40.256	43.773	50.892	30
40	22.164	26.509	29.051	32.352	39.335	37.263	51.805	55.758	63.391	40
60	37.485	43.188	46.459	50.647	59.335	68.969	74.397	79.082	88.379	60
80	53.540	60.391	64.278	69.213	79.334	90.403	96.578	101.879	112.329	80
100	70.065	77.929	82.358	87.950	99.334	111.667	118.498	123.342	135.807	100
200	156.432	168.279	174.835	183.006	199.333	216.618	226.021	233.994	249.445	200
Z_α	-2.33	-1.64	-1.28	-0.84	0.00	0.84	1.28	1.64	2.32	Z_α

註：近似公式為 $\chi^2_\alpha(\nu) \cong \frac{1}{2}\left(Z_\alpha + \sqrt{2\nu-1}\right)^2$

例如： $\chi^2_{0.90}(30) \cong \frac{1}{2}\left(-1.28 + \sqrt{60-1}\right)^2 = 20.487$