

可靠度技術手冊

指數分佈可靠度評估技術



彭鴻霖 編著

中華民國八十九年十二月十八日

指數分佈可靠度評估技術

目 錄

1	前言	1
2	分佈特性	1
2.1	數学期望值	1
2.2	特性描述	1
2.3	應用說明	3
3	參數推定	3
3.1	點推定	3
3.1.1	不更換固定次數壽命試驗	3
3.1.2	要更換固定次數壽命試驗	5
3.1.3	不更換固定時間壽命試驗	7
3.1.4	要更換固定時間壽命試驗	8
3.2	區間推定	10
3.2.1	不更換固定次數壽命試驗	10
3.2.2	要更換固定次數壽命試驗	15
3.2.3	要更換固定時間壽命試驗	18
3.2.4	不更換固定時間壽命試驗	19

指數分佈可靠度評估技術

1 前言

指數分佈是一種很重要的壽命分佈類型，許多產品，尤其是複雜系統的壽命通常都可以用指數分佈來描述，或為了簡化處理問題而假設其為指數分佈。

2 分佈特性

指數分佈是失效率 λ 對時間成一定值的分佈，一般記為 $\exp(t;\lambda)$ ，在失效曲線的偶發失效領域成立，其機率密度函數及可靠度函數分別為：

$$f_T(t) = \lambda \exp(-\lambda t), 0 < t < \infty, 0 < \lambda \quad (1)$$

$$F_T(t) = \int_0^{\infty} f_T(t) dt = 1 - \exp(-\lambda t)$$

$$R(t) = 1 - F_T(t) = \exp(-\lambda t) \quad (2)$$

由上式可知，指數分佈有一參數，與隨機變數 t 為乘除關係，因此為指數分佈的尺度參數。

2.1 數學期望值

指數分佈的平均值 $E[T]$ 及變異數 $V[T]$ 分別為：

$$E[T] = \int_0^{\infty} t f_T(t) dt = \frac{1}{\lambda} = \theta \quad (3)$$

$$V[T] = \int_0^{\infty} t^2 f_T(t) dt = \frac{1}{\lambda^2} = \theta^2 \quad (4)$$

θ 為平均失效間隔時間或平均壽命。

2.2 特性描述

壽命時間呈指數分佈之機率密度函數、可靠度函數及失效率函數如圖 1 所示，由圖可看出 $f_T(t)$ 在時間短處呈最大值，亦即：

$$f_T(t=0) = \lambda \quad (5)$$

可靠度函數的趨勢與機率密度函數相似，失效率函數則不隨時間而變化，為一常數值 λ ，亦即：

$$h(t) = 1 \quad (6)$$

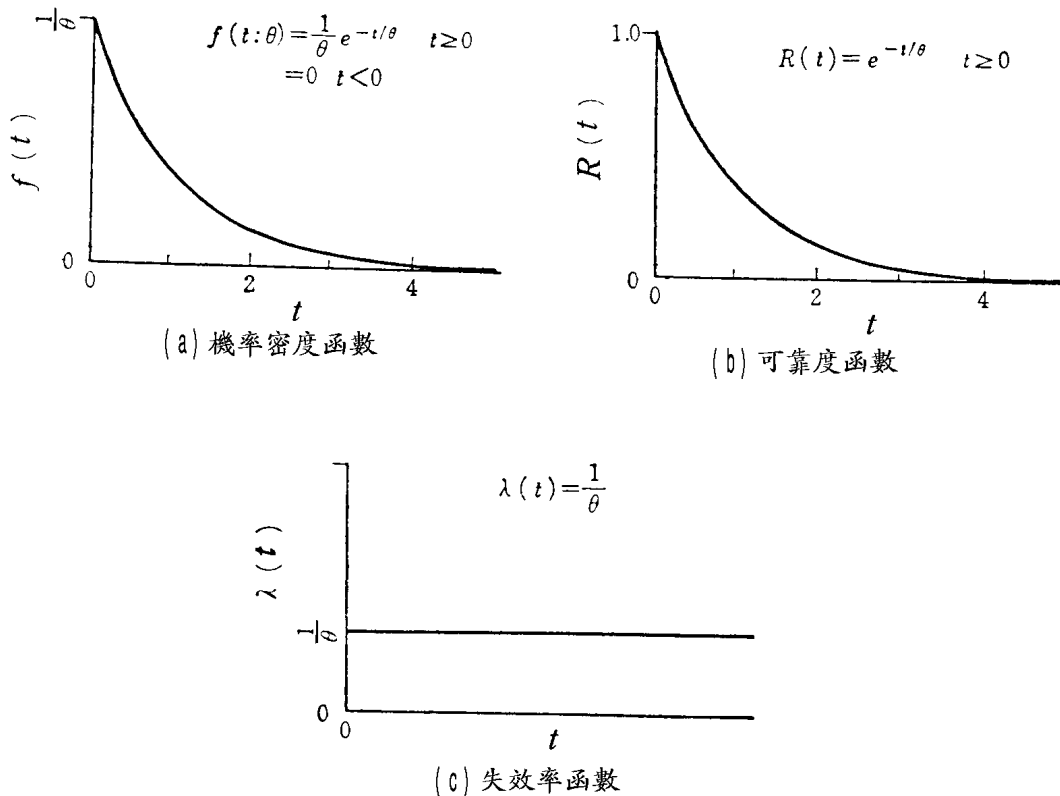


圖 1 指數分佈之機率密度函數、可靠度函數及失效率函數曲線

指數分佈的重要性質之一為無記憶性(memoryless)，即一物品的失效時間為指數分佈，則當時刻為 τ 物品為正常時，則在 τ 以後操作一段時間 t 的可靠度或剩餘壽命和新的產品一樣，與 τ 無關，亦即：

$$\begin{aligned} R(T = t + \tau | T = \tau) &= \frac{R(t + \tau)}{R(\tau)} \\ &= \frac{\exp(-\lambda(t + \tau))}{\exp(-\lambda\tau)} \\ &= \exp(-\lambda t) \end{aligned} \quad (7)$$

當產品的壽命等於平均壽命時之可靠度值為：

$$R(t = \theta) = \exp\left(-\frac{\theta}{\theta}\right) = \exp(-1) = 0.368 \quad (8)$$

可見指數分佈在平均壽命 θ 延長時，標準偏差也與之同等增大，壽命等於平均壽命時的存活數為總數的 36.8%，遠小於常態分佈之 50.0%，此種性質對產品的可靠度而言未必理想。所以，指數分佈領域不可視為偶發失效，須調查失效原因，減少失效要因。

2.3 應用說明

以前，電子管壽命被列為指數分佈的代表，有礙電子裝備的高可靠度化，但隨著失效原因的減少，電子管的壽命也接近常態分佈，也實用於高可靠度裝備。

指數分佈在產品複雜、失效原因重合時，失效的發生時點不規則化，可用偶發模型說明。經驗上知道修理而使用的產品失效間隔時間符合指數分佈。理論上也證明此事的妥當性。亦即，根據 Derrick 的指數極限定理，修理而使用的產品不論構成組件的失效分佈是什麼，產品的失效間隔時間(time between failure)最後呈指數分佈。在產品使用前進行除錯(debugging)，除去初期失效的零件，更換良品，或使用一段時間後，預防性更換容易失效的零件，進行預防保養，即可使產品的失效率一定化，這些場合可用指數分佈。

3 參數推定

指數可靠度參數的推定方法與試驗數據獲得條件有關，一般壽命試驗進行時取 n 個樣本按規劃的試驗條件進行試驗，試驗過程觀察試件失效情形，所獲得的試驗數據為失效發生次數(i)與失效發生時間(t_i)。當所有 n 個樣本都試驗至失效，稱為完全壽命試驗；若 n 個樣本只試驗至發生 $r(r < n)$ 個失效即停止試驗，則稱為截尾壽命試驗。截尾壽命試驗又分為時間截尾壽命試驗與次數截尾壽命試驗兩種，時間截尾壽命試驗又稱為固定時間壽命試驗，次數截尾壽命試驗又稱為固定次數壽命試驗。另外根據試驗過程中當發生失效時要不要更換失效試件又分為不更換與要更換兩種情況，因此壽命試驗結果總共有 10 種可能狀況，每一種狀況各有其參數的點推定與區間推定方法，以下分別就點推定與區間推定說明各種壽命試驗方式的失效率、平均失效時間或平均壽命、及可靠度之推定過程。

3.1 點推定

3.1.1 不更換固定次數壽命試驗

物品的壽命或失效時間為指數分佈，其機率密度函數為：

$$f_T(t) = \lambda \exp(-\lambda t), t > 0, \lambda > 0 \quad (9)$$

現抽取 n 個樣本進行不更換固定時間壽命試驗，截尾次數 r ，假設試驗觀察結果 r 個樣本失效時停止試驗，其失效發生時間依次為 $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_r$ ，亦即試驗停止時間為 t_r 。在這種壽命試驗規劃情形，每一個失效發生時間為可以用指數分佈來描述的隨機變數，試驗截止時的總試驗時間 $T(t_r) = t_1 + t_2 + \dots + t_r = \sum_{i=1}^r t_i$ 亦為隨機變數，根據機率理論，此一隨機變數可以用伽瑪分佈來描述。

指數壽命機率分佈可以根據試驗結果利用最大概似法(MLE)求取其參數 λ ，為了要確定試驗數據的概似函數，首先需要知道每一個試驗觀察結果(失效時間)出現的機率。物品在 $[t_i, t_i + dt_i]$ 期間內發生失效的機率為 $f(t_i)dt_i = \lambda \exp(-\lambda t_i)dt_i, i = 1, 2, \dots, r$ ，剩餘的 $n - r$ 個物品的壽命超過 t_r 的機率為 $[\exp(-\lambda t_r)]^{n-r}$ 。所以上述試驗結果出現機率的近似值為：

$$k[\lambda \exp(-\lambda t_1)dt_1][\lambda \exp(-\lambda t_2)dt_2] \cdots [\lambda \exp(-\lambda t_r)dt_r][\exp(-\lambda t_r)]^{n-r} \quad (10)$$

其中 k 為一特定常數。忽略特定常數並不會影響概似函數之計算，因此概似函數可寫成：

$$L(\lambda) = \lambda^r \exp\{-\lambda[t_1 + t_2 + \cdots + t_r + (n-r)t_r]\} \quad (11)$$

上式等號雙方取對數後得到：

$$\ln[L(\lambda)] = r \ln \lambda - \lambda[t_1 + t_2 + \cdots + t_r + (n-r)t_r] \quad (12)$$

上式對 λ 求導數，可得到概似方程式：

$$\frac{r}{\lambda} - [t_1 + t_2 + \cdots + t_r + (n-r)t_r] = 0 \quad (13)$$

於是可求得 λ 的MLE為：

$$\hat{\lambda} = \frac{r}{T(t_r)} \quad (14)$$

其中 $T(t_r) = t_1 + t_2 + \cdots + t_r + (n-r)t_r$ 為 n 個樣本試件的總試驗時間，也就是當試驗到 r 截尾次數相對的時刻 t_r 時 n 個物品的試驗時間的總和。

指數分佈的平均值與參數的關係為 $\theta = 1/\lambda$ ，因此平均壽命或平均失效時間的MLE為：

$$\hat{\theta} = \frac{1}{\hat{\lambda}} = \frac{T(t_r)}{r} \quad (15)$$

而物品的可靠度為：

$$\hat{R}(t) = \exp(-\hat{\lambda}t) = \exp\left(-\frac{t}{\hat{\theta}}\right) \quad (16)$$

[範例 1] 假設某產品壽命為指數分佈，抽取 9 件產品進行不更換固定時間壽命試驗，截尾次數為 $r=7$ ，試驗結果除第 8、9 個產品沒有失效外，其餘 7 個產品的失

效時間分別為 650、450、150、530、600、500、700，單位為小時(hr)。求失效率 λ 與平均失效時間 θ 之 MLE。

[解答] 根據題意， $n=9$ 、 $r=7$ 、 $t_r=700$ 小時。

先計算總試驗時間 $T(t_r)$ ：

$$T(t_r) = 650 + 450 + 150 + 530 + 600 + 500 + 700 + (9 - 7)700 = 4980$$

所以失效率 λ 與平均失效時間 θ 之 MLE 分別為：

$$\hat{\lambda} = \frac{7}{4980} = 0.001406 \text{ fr/hr}$$

$$\hat{\theta} = \frac{4980}{7} = 711.4 \text{ hr}$$

3.1.2 要更換固定次數壽命試驗

物品的壽命或失效時間為指數分佈，其機率密度函數為：

$$f_T(t) = \lambda \exp(-\lambda t), t > 0, \lambda > 0$$

現抽取 n 個樣本進行壽命試驗，截尾次數為 r ，前 r 個失效時間為 $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_r$ ，即在 $[0, t_r]$ 時間內有 r 個樣本物品失效。在試驗過程中當物品發生失效時立即進行更換，如再發生失效，也立即更換，直到失效個數達到 r 個時停止試驗。每一個失效時間均符合機率分佈為指數分佈的隨機變數，但對每一個試件而言，失效次數為波桑分佈，亦即：

$$\Pr\{X = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \exp(-\lambda t), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (17)$$

如今有 n 個試件同時獨立的進行有更換的壽命試驗，若第 i 個試件在 $[0, t]$ 內的失效數為 X_i ，則 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是 n 個相互獨立且同為波桑分佈的隨機變數，其和 $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ 就是 n 個試件在 $[0, t]$ 內的失效總數，根據機率理論其分佈為參數等於 $n\lambda t$ 的波桑分佈，亦即：

$$\Pr\{Y = k\} = \frac{(n\lambda t)^k}{k!} \exp(-n\lambda t) \quad (18)$$

指數壽命分佈可利用最大概似法(MLE)求取其參數 λ ，為了要確定試驗數據的概似函數，首先需要知道試驗觀察結果(失效)出現的機率。根據上述說明可知， n 物品在 $[t_i, t_i + dt_i]$ 內發生一次失效的機率為 $(n\lambda dt_i) \exp(-n\lambda dt_i)$ ， $i = 1, 2, \dots, r$ ，所以上述試驗結果出現機率的近似值為：

$$\begin{aligned}
& k[n\lambda dt_1 \exp(-n\lambda dt_1)][n\lambda dt_2 \exp(-n\lambda dt_2)] \cdots [n\lambda dt_r \exp(-n\lambda dt_r)] \\
& = k(n\lambda)^r \exp[-n\lambda(dt_1 + dt_2 + \cdots + dt_r)] dt_1 dt_2 \cdots dt_r
\end{aligned} \quad (19)$$

其中 k 為一特定常數，且 $dt_1 + dt_2 + \cdots + dt_r = t_r$ 。忽略特定常數並不會影響概似函數之計算，因此概似函數可寫成：

$$L(\lambda) = (n\lambda)^r \exp\{-n\lambda t_r\} \quad (20)$$

上式等號雙方取對數後得到：

$$\ln[L(\lambda)] = r \ln(n\lambda) - n\lambda t_r \quad (21)$$

上式對 λ 求導數，可得到概似方程式：

$$\frac{r}{\lambda} - nt_r = 0 \quad (22)$$

於是可求得 λ 的 MLE 為：

$$\hat{\lambda} = \frac{r}{T(t_r)} = \frac{r}{nt_r} \quad (23)$$

其中 $T(t_r) = nt_r$ 為 n 個樣本試件的總試驗時間，也就是當試驗到截尾時刻 t_r 時 n 個物品的試驗時間的總和。

指數分佈的平均值與參數的關係為 $\theta = 1/\lambda$ ，因此平均壽命或平均失效時間的 MLE 為：

$$\hat{\theta} = \frac{1}{\hat{\lambda}} = \frac{T(t_r)}{r} = \frac{nt_r}{r} \quad (24)$$

而物品的可靠度為：

$$\hat{R}(t) = \exp(-\hat{\lambda}t) = \exp\left(-\frac{t}{\hat{\theta}}\right) \quad (25)$$

[範例 2] 假設某產品的壽命為指數分佈，抽取 7 件產品進行要更換固定次數壽命試驗，截尾次數為 9 次，試驗結果 1 號試件 1 次，其失效時間為 650 hr，2 號試件失效 2 次，失效時間為 450 hr 與 700 hr，3 號試件失效 2 次，失效時間為 120 hr 與 400 hr，4 號試件失效 1 次，失效時間為 530 hr，5 號試件失效 1 次，失效時間為 600 hr，6 號試件失效 2 次，失效時間為 350 hr 與 600 hr，7 號試件無失效。求失效率 λ 與平均失效時間 θ 之 MLE。

[解答 2] 根據題意， $n=7$ 、 $r=9$ 、 $t_r = 700$ hr。

先計算總試驗時間： $T(t_r) = nt_r = 7 \times 700 = 4900 \text{ hr}$

所以失效率 λ 與平均失效時間 θ 之 MLE 分別為：

$$\hat{\lambda} = \frac{9}{4900} = 0.001837 \text{ fr/hr}$$

$$\hat{\theta} = \frac{4900}{9} = 544.4 \text{ hr}$$

3.1.3 不更換固定時間壽命試驗

物品的壽命或失效時間為指數分佈，其機率密度函數為：

$$f_T(t) = \lambda \exp(-\lambda t), t > 0, \lambda > 0$$

現抽取 n 個樣本進行不更換固定時間壽命試驗，截尾時間為 t_0 ，假設試驗觀察結果在 $[0, t_0]$ 中有 r 個樣本失效，其失效發生時間依次為 $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_r$ 。在這種壽命試驗規劃情形，試驗時間為固定值，失效發生次數及每次失效時間均為隨機變數，根據機率理論，此一隨機現象可以用波桑過程來描述，其中失效次數為波桑分佈、失效時間為指數分佈。

指數壽命分佈可利用最大概似法(MLE)求取其參數 λ ，為了要確定試驗數據的概似函數，首先需要知道試驗觀察結果(失效)出現的機率。物品在 $[t_i, t_i + dt_i]$ 期間內發生失效的機率為 $f(t_i)dt_i = \lambda \exp(-\lambda t_i)dt_i, i = 1, 2, \dots, r$ ，剩餘的 $n - r$ 個物品的壽命超過 t_0 的機率為 $[\exp(-\lambda t_0)]^{n-r}$ 。所以上述試驗結果出現機率的近似值為：

$$k[\lambda \exp(-\lambda t_1)dt_1][\lambda \exp(-\lambda t_2)dt_2] \dots [\lambda \exp(-\lambda t_r)dt_r][\exp(-\lambda t_0)]^{n-r} \quad (26)$$

其中 k 為一特定常數。忽略特定常數並不會影響概似函數之計算，因此概似函數可寫成：

$$L(\lambda) = \lambda^r \exp\{-\lambda[t_1 + t_2 + \dots + t_r + (n-r)t_0]\} \quad (27)$$

上式等號雙方取對數後得到：

$$\ln[L(\lambda)] = r \ln \lambda - \lambda[t_1 + t_2 + \dots + t_r + (n-r)t_0] \quad (28)$$

上式對 λ 求導數，可得到概似方程式：

$$\frac{r}{\lambda} - [t_1 + t_2 + \dots + t_r + (n-r)t_0] = 0 \quad (29)$$

於是可求得 λ 的 MLE 為：

$$\hat{\lambda} = \frac{r}{T(t_0)} \quad (30)$$

其中 $T(t_0) = t_1 + t_2 + \cdots + t_r + (n-r)t_0 = \sum_{i=1}^r t_i + (n-r)t_0$ 為 n 個樣本試件的總試驗時間，也就是當試驗到截尾時刻 t_0 時 n 個物品的試驗時間的總和，此數也是一隨機變數。

指數分佈的平均值與參數的關係為 $\theta = 1/\lambda$ ，因此平均壽命或平均失效時間的 MLE 為：

$$\hat{\theta} = \frac{1}{\hat{\lambda}} = \frac{T(t_0)}{r} \quad (31)$$

而物品的可靠度為：

$$\hat{R}(t) = \exp(-\hat{\lambda}t) = \exp\left(-\frac{t}{\hat{\theta}}\right) \quad (32)$$

[範例 3] 假設某產品的壽命為指數分佈，抽取 7 件產品進行不更換固定時間壽命試驗，截尾時間為 700 小時，試驗結果除 7 號沒有失效外，其餘 6 個試件的失效時間分別為 650 hr、450 hr、120 hr、530 hr、600 hr、450 hr。求失效率 λ 與平均失效時間 θ 之 MLE。

[解答 3] 根據題意， $n=7$ 、 $r=6$ 、 $t_0=700$ 小時。

先計算總試驗時間 $T(t_0)$ ：

$$T(t_0) = 650 + 450 + 120 + 530 + 600 + 450 + (7-6)700 = 3500$$

所以失效率 λ 與平均失效時間 θ 之 MLE 分別為：

$$\hat{\lambda} = \frac{6}{3500} = 0.00174 \text{ fr/hr}$$

$$\hat{\theta} = \frac{3500}{6} = 583.3 \text{ hr}$$

3.1.4 要更換固定時間壽命試驗

物品的壽命或失效時間為指數分佈，其機率密度函數為：

$$f_T(t) = \lambda \exp(-\lambda t), t > 0, \lambda > 0$$

現抽取 n 個樣本進行要更換固定時間壽命試驗，截尾時間為 t_0 ，假設試驗觀察結果在 $[0, t_0]$ 中有 r 個樣本失效，其失效發生時間依次為 $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_r$ 。在試驗過程中當物品發生失效時立即進行更換，如再發生失效，也立即更換，直到其中有一個試件的試驗時間達到 t_0 時停止試驗。每一個失效時間均符合機率分佈為指數分佈的隨機變數，但對每一個試件而言，失效次數為波桑分佈，亦即：

$$\Pr\{X = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \exp(-\lambda t), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (33)$$

如今有 n 個試件同時獨立的進行有更換的壽命試驗，若第 i 個試件在 $[0, t)$ 內的失效數為 X_i ，則 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是 n 個相互獨立且同為波桑分佈的隨機變數，其和 $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ 就是 n 個試件在 $[0, t)$ 內的失效總數，根據機率理論其分佈為參數等於 $n\lambda t$ 的波桑分佈，亦即：

$$\Pr\{Y = k\} = \frac{(n\lambda t)^k}{k!} \exp(-n\lambda t) \quad (34)$$

指數壽命分佈可利用最大概似法(MLE)求取其參數 λ ，為了要確定試驗數據的概似函數，首先需要知道試驗觀察結果(失效)出現的機率。根據上述說明可知， n 物品在 $[t_i, t_i + dt_i)$ 內發生一次失效的機率為 $(n\lambda dt_i) \exp(-n\lambda dt_i)$, $i = 1, 2, \dots, r$ ，所以上述試驗結果出現機率的近似值為：

$$\begin{aligned} & k[n\lambda dt_1 \exp(-n\lambda dt_1)][n\lambda dt_2 \exp(-n\lambda dt_2)] \dots [n\lambda dt_r \exp(-n\lambda dt_r)] \\ & = k(n\lambda)^r \exp[-n\lambda(dt_1 + dt_2 + \dots + dt_r)] dt_1 dt_2 \dots dt_r \end{aligned} \quad (35)$$

其中 k 為一特定常數，且 $dt_1 + dt_2 + \dots + dt_r = t_0$ 。忽略特定常數並不會影響概似函數之計算，因此概似函數可寫成：

$$L(\lambda) = (n\lambda)^r \exp\{-n\lambda t_0\} \quad (36)$$

上式等號雙方取對數後得到：

$$\ln[L(\lambda)] = r \ln(n\lambda) - n\lambda t_0 \quad (37)$$

上式對 λ 求導數 $\partial \ln[L(\lambda)] / \partial \lambda = 0$ ，可得到概似方程式：

$$\frac{r}{\lambda} - nt_0 = 0 \quad (38)$$

於是可求得 λ 的 MLE 為：

$$\hat{\lambda} = \frac{r}{T(t_0)} = \frac{r}{nt_0} \quad (39)$$

其中 $T(t_0) = nt_0$ 為 n 個樣本試件的總試驗時間，也就是當試驗到截尾時刻 t_0 時 n 個物品的試驗時間的總和。

指數分佈的平均值與參數的關係為 $\theta = 1/\lambda$ ，因此平均壽命或平均失效時間的 MLE 為：

$$\hat{\theta} = \frac{1}{\hat{\lambda}} = \frac{T(t_0)}{r} = \frac{nt_0}{r} \quad (40)$$

[範例 4] 假設某產品的壽命為指數分佈，抽取 7 件產品進行要更換固定時間壽命試驗，截尾時間為 700 小時，試驗結果 1 號試件 1 次，其失效時間為 650 hr，2 號試件失效 1 次，失效時間為 450 hr，3 號試件失效 2 次，失效時間為 120 hr 與 530 hr，4 號試件失效 1 次，失效時間為 530 hr，5 號試件失效 2 次，失效時間為 450 hr 與 600 hr，7 號試件無失效。求失效率 λ 與平均失效時間 θ 之 MLE。

[解答 3] 根據題意， $n=7$ 、 $r=8$ 、 $t_0 = 700$ hr。

先計算總試驗時間： $T(t_0) = n \times t_0 = 7 \times 700 = 4900$ hr

所以失效率 λ 與平均失效時間 θ 之 MLE 分別為：

$$\hat{\lambda} = \frac{8}{4900} = 0.001633 \text{ fr/hr}$$

$$\hat{\theta} = \frac{4900}{8} = 612.5 \text{ hr}$$

3.2 區間推定

3.2.1 不更換固定次數壽命試驗

物品的壽命或失效時間為指數分佈，其機率密度函數為：

$$f_T(t) = \lambda \exp(-\lambda t), t > 0, \lambda > 0$$

現抽取 n 個樣本進行不更換固定時間壽命試驗，截尾次數 r ，假設試驗觀察結果 r 個樣本失效時停止試驗，其失效發生時間依次為 $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_r$ ，亦即試驗停止時間為 t_r 。指數參數的點推定乃是根據樣本統計量所計算得的，不同的樣本所獲得的推定值不可能完全相同，因此推定值 $\hat{\lambda}$ 為一隨機變數，為求正確評估須執行區間推定，決定在給

定的信賴水準(confidence level) γ ($0 < \gamma < 1$) 下, 參數推定值的上下兩個信賴界限(confidence limit), 下側信賴界限又稱信賴下限, 記為 $\hat{\lambda}_L$, 上側則稱為信賴上限, 記為 $\hat{\lambda}_U$; 信賴下限與信賴上限構成區間推定的信賴區間(confidence interval), 記為 $[\hat{\lambda}_L, \hat{\lambda}_U]$, 代表著此一區間涵蓋參數真值的機率為 γ 。一般進行區間推定時有單邊與兩邊兩種情形: 在可靠度應用失效率是越小越好, 因此選擇考量上側界限的單邊區間推定, 亦即以 $[0, \hat{\lambda}_U]$ 為信賴區間。區間推定時首先要決定信賴水準, 指數機率參數 λ 的單邊信賴上限 $\hat{\lambda}_U$ 必須滿足下式:

$$\Pr\{\lambda \leq \hat{\lambda}_U\} = \gamma \quad (41)$$

雙邊信賴界限 $\hat{\lambda}_L$ 與 $\hat{\lambda}_U$ 則須滿足下式:

$$\Pr\{\hat{\lambda}_L \leq \lambda \leq \hat{\lambda}_U\} = \gamma \quad (42)$$

由上節可知機率參數 λ 的總試驗時間 $T(t_r)$ 與 MLE 點推定值 $\hat{\lambda}$ 分別為:

$$T(t_r) = t_1 + t_2 + \cdots + t_r + (n-r)t_r \quad (43)$$

$$\hat{\lambda} = \frac{r}{T(t_r)} \quad (44)$$

由於試驗是固定次數壽命試驗, 截尾次數 r 為常數, 總試驗時間 $T(t_r)$ 為隨機變數, 可以改寫為:

$$\begin{aligned} T(t_r) &= n(t_1 - t_0) + (n-1)(t_2 - t_1) + \cdots + (n-r+1)(t_r - t_{r-1}) \\ &= \sum_{i=1}^r (n-i+1)(t_i - t_{i-1}) \end{aligned} \quad (45)$$

其中 $t_0 = 0$ 。若令:

$$u_i = (n-i+1)(t_i - t_{i-1}), i = 1, 2, \dots, r \quad (46)$$

每次發生失效的時間 t_i 為隨機變數, 顯然 $(u_i, i = 1, 2, \dots, r)$ 亦為一組隨機變數。根據次序統計量(order statistics)的分佈特性可以證明隨機變數 $u_1, u_2, \dots, u_r$ 可以彼此相互獨立, 參數為 λ 的指數分佈來描述, 而指數分佈為伽瑪分佈之特例, 因此 u_i 可以參數 $k=1$ 與 λ 之伽瑪分佈來描述, 亦即:

$$u_i \sim \Gamma(1, \lambda), i = 1, 2, \dots, r \quad (47)$$

總試驗時間 T 為各別失效時間之和，亦即隨機變數，其機率特性可用參數 $k = r$ 與 λ 之伽瑪分佈來描述，亦即：

$$T(t_r) = \sum_{i=1}^r u_i \sim \Gamma(r, \lambda) \quad (48)$$

將總試驗時間 T 乘以 2λ 後得到 $2\lambda T(t_r)$ ，經過整理後可得到：

$$2\lambda T(t_r) \sim \Gamma\left(r, \frac{1}{2}\right) = \chi^2(2r) \quad (49)$$

亦即此一新隨機變數可以用特定型式的伽瑪分佈來描述，且其機率分佈為自由度(參數)為 $2r$ 的卡方分佈 $\chi^2(2r)$ 。

因此，考慮單邊信賴推定情形，在 γ 信賴水準下，隨機變數 $2\lambda T(t_r)$ 的信賴上限須滿足下式：

$$\Pr\{2\lambda T(t_r) \leq \chi_{(1-\gamma)}^2(2r)\} = \gamma \quad (50)$$

習慣上卡方分佈係以機率密度函數曲線 $f_{\chi^2}(\chi^2)$ 的上側面積表示其機率分佈函數，如圖 2 所示。由卡方分佈的上側分位數表，可找到滿足下式相對應的卡方值 $\chi_{(1-\gamma)}^2(2r)$ 。

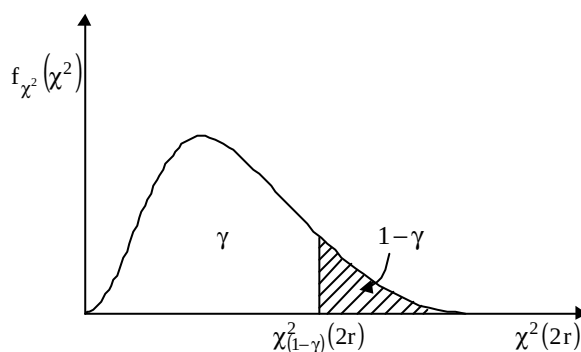


圖 2: 卡方分佈 $\chi^2(2r)$ 機率密度函數與其單邊信賴上限

當上述情形應用於某一實際壽命試驗結果時， $2T(t_r)$ 為由試驗決定的固定數據，根據上式加以整理，可得下式：

$$\Pr\left\{\lambda \leq \frac{\chi_{(1-\gamma)}^2(2r)}{2T(t_r)}\right\} = \gamma \quad (51)$$

亦即根據試驗觀測數據，可以計算當信賴水準為 γ 時，失效率推定值的區間上限為：

$$\hat{\lambda}_U = \frac{\chi_{(1-\gamma)}^2(2r)}{2T(t_r)} \quad (52)$$

同理，平均壽命或平均失效時間的 γ 信賴下限推定值為：

$$\hat{\theta}_L = \frac{1}{\hat{\lambda}_U} = \frac{2T(t_r)}{\chi_{(1-\gamma)}^2(2r)} \quad (53)$$

而可靠度的 γ 信賴下限推定值為：

$$\hat{R}_L = \exp(-\hat{\lambda}_U t) = \exp\left(-\frac{\chi_{(1-\gamma)}^2(2r)t}{2T(t_r)}\right) \quad (54)$$

若是考量雙邊信賴水準情形，一般假設兩個信賴界限是對稱的，如圖 3 所示，在 γ 信賴水準下，失效率的信賴界限 $[\hat{\lambda}_L, \hat{\lambda}_U]$ 須滿足下式：

$$\Pr\left\{\frac{\chi_{(1+\gamma)/2}^2(2r)}{2T(t_r)} \leq \lambda \leq \frac{\chi_{(1-\gamma)/2}^2(2r)}{2T(t_r)}\right\} = \gamma \quad (55)$$

亦即失效率推定值的信賴下限與信賴上限分別為：

$$\hat{\lambda}_L = \frac{\chi_{(1+\gamma)/2}^2(2r)}{2T(t_r)} \quad (56)$$

$$\hat{\lambda}_U = \frac{\chi_{(1-\gamma)/2}^2(2r)}{2T(t_r)} \quad (57)$$

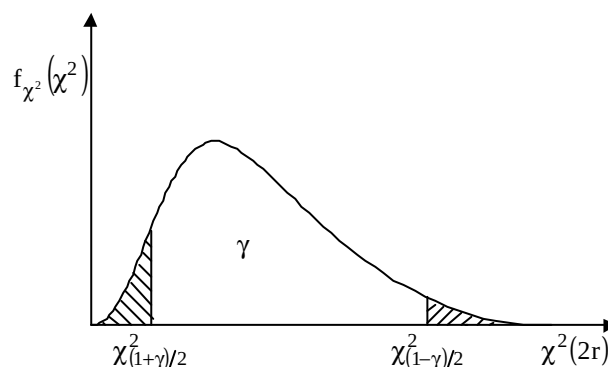


圖 3:卡方分佈機率密度函數與及雙邊信賴界限

同理，平均壽命或平均失效時間的信賴下限與信賴上限分別為：

$$\hat{\theta}_L = \frac{1}{\hat{\lambda}_U} = \frac{2T(t_r)}{\chi^2_{(1-\gamma)/2}(2r)} \quad (58)$$

$$\hat{\theta}_U = \frac{1}{\hat{\lambda}_L} = \frac{2T(t_r)}{\chi^2_{(1+\gamma)/2}(2r)} \quad (59)$$

而可靠度的信賴下限與信賴上限分別為：

$$\hat{R}_L = \exp(-\hat{\lambda}_U t) = \exp\left(-\frac{\chi^2_{(1-\gamma)/2}(2r)t}{2T(t_r)}\right) \quad (60)$$

$$\hat{R}_U = \exp(-\hat{\lambda}_L t) = \exp\left[-\frac{\chi^2_{(1+\gamma)/2}(2r)}{2T(t_r)}\right] \quad (61)$$

[範例 5] 假設某產品壽命為指數分佈，抽取 9 個試件執行不更換固定次數壽命試驗，截尾次數 $r = 7$ ，試驗結果是 $t_1 = 150$ hr、 $t_2 = 450$ hr、 $t_3 = 500$ hr、 $t_4 = 530$ hr、 $t_5 = 600$ hr、 $t_6 = 650$ hr、 $t_7 = 700$ hr，

(1). 求信賴水準為 0.90 之平均壽命 θ 的單邊信賴下限。

(2). 求信賴水準為 0.90 之平均壽命 θ 的雙邊信賴界限。

[解答 5] 由題意知， $n = 9$ 、 $r = 7$ 、 $t_r = 700$ hr，

總試驗時間： $T(t_r) = 150 + 450 + 500 + 530 + 600 + 650 + 700 = 4980$ hr，

首先計算 γ 信賴水準下，平均壽命 θ 的單邊信賴下限： $\hat{\theta}_L = \frac{2T(t_r)}{\chi^2_{(1-\gamma)}(2r)}$ ，

查卡方分佈表得： $\chi^2_{(1-0.9)}(2 \times 7) = \chi^2_{0.1}(14) = 21.064$

因此可計算得信賴水準為 $\gamma = 0.90$ 時， θ 的單邊信賴下限：

$$\hat{\theta}_L = \frac{2T(t_r)}{\chi^2_{(1-\gamma)}(2r)} = \frac{2 \times 4980}{21.064} = 472.8 \text{ hr}。$$

其次計算計算 γ 信賴水準下，平均壽命 θ 的雙邊信賴界限：

$$[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U] = \left[\frac{2T(t_r)}{\chi^2_{(1+\gamma)/2}(2r)}, \frac{2T(t_r)}{\chi^2_{(1-\gamma)/2}(2r)} \right]。$$

經查卡方分佈表得： $\chi^2_{(1+\gamma)/2}(2r) = \chi^2_{0.95}(14) = 6.571$ 、

$$\chi^2_{(1-\gamma)/2}(2r) = \chi^2_{0.05}(14) = 23.685,$$

因此可計算得信賴水準 $\gamma = 0.90$ 時， θ 的雙邊信賴界限：

$$[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U] = \left[\frac{2T(t_r)}{\chi^2_{(1-\gamma)/2}(2r)}, \frac{2T(t_r)}{\chi^2_{(1+\gamma)/2}(2r)} \right] = \left[\frac{2 \times 4980}{23.685}, \frac{2 \times 4980}{6.571} \right] = [420.5, 1515.8] \text{ hr}$$

所以平均壽命的雙邊信賴區間為 $[420.5, 1515.8] \text{ hr}$ 。

3.2.2 要更換固定次數壽命試驗

物品的壽命或失效時間為指數分佈，其機率密度函數為：

$$f_T(t) = \lambda \exp(-\lambda t), t > 0, \lambda > 0$$

現抽取 n 個樣本進行壽命試驗，截尾次數為 r ，前 r 個失效時間為 $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_r$ ，即在 $[0, t_r]$ 時間內有 r 個樣本物品失效。在試驗過程中當物品發生失效時立即進行更換，如再發生失效，也立即更換，直到失效個數達到 r 個時停止試驗。

由上節可知機率參數 λ 的總試驗時間 $T(t_r)$ 與 MLE 點推定值 $\hat{\lambda}$ 分別為：

$$T(t_r) = nt_r \quad (62)$$

$$\hat{\lambda} = \frac{r}{T(t_r)} = \frac{r}{nt_r} \quad (63)$$

式中 r 為固定數。

t_r 可以改寫成 $t_r = (t_1 - t_0) + (t_2 - t_1) + \dots + (t_r - t_{r-1}) = \sum_{i=1}^r (t_i - t_{i-1})$ ，其中 $t_0 = 0$ 。根據次序統計量的分佈可以證明，各個時間差值 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ 為相互獨立且參數等於 $n\lambda$ 的指數分佈，亦即參數為 $k=1$ 與 $n\lambda$ 的伽瑪分佈：

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1} \sim \Gamma(1, n\lambda), i = 1, 2, \dots, r \quad (64)$$

則 $t_r = \sum_{i=1}^r (t_i - t_{i-1})$ 可以用參數為 $k=r$ 與 $n\lambda$ 的伽瑪分佈來描述：

$$t_r = \sum_{i=1}^r (t_i - t_{i-1}) \sim \Gamma(r, n\lambda) \quad (65)$$

兩邊乘以 $2n\lambda$ 後得到：

$$2\lambda nt_r = 2\lambda T(t_r) \sim \Gamma\left(r, \frac{1}{2}\right) = \chi^2(2r) \quad (66)$$

結果顯示隨機變數 $2\lambda T(t_r)$ 為自由度(參數)為 $2r$ 的卡方分佈 $\chi^2(2r)$ ，如圖 1 所示。

因此，考慮單邊信賴推定情形，在 γ 信賴水準下，隨機變數 $2\lambda T(t_r)$ 的信賴上限須滿足下式：

$$\Pr\{2\lambda T(t_r) \leq \chi_{(1-\gamma)}^2(2r)\} = \gamma \quad (67)$$

由卡方分佈的上側分位數表，可找到滿足下式相對應的卡方值 $\chi_{(1-\gamma)}^2(2r)$ 。

當上述情形應用於某一實際壽命試驗結果時， $2T(t_r)$ 為由試驗決定的固定數據，根據上式加以整理，可得下式：

$$\Pr\left\{\lambda \leq \frac{\chi_{(1-\gamma)}^2(2r)}{2T(t_r)}\right\} = \gamma \quad (68)$$

亦即根據試驗觀測數據，可以計算當信賴水準為 γ 時，失效率推定值的區間上限為：

$$\hat{\lambda}_U = \frac{\chi_{(1-\gamma)}^2(2r)}{2T(t_r)} \quad (69)$$

同理，平均壽命或平均失效時間的 γ 信賴下限推定值為：

$$\hat{\theta}_L = \frac{1}{\hat{\lambda}_U} = \frac{2T(t_r)}{\chi_{(1-\gamma)}^2(2r)} \quad (70)$$

而可靠度的 γ 信賴下限推定值為：

$$\hat{R}_L = \exp(-\hat{\lambda}_U t) = \exp\left(-\frac{\chi_{(1-\gamma)}^2(2r)t}{2T(t_r)}\right) \quad (71)$$

若是考量雙邊信賴水準情形，一般假設兩個信賴界限是對稱的，如圖 2 所示，在 γ 信賴水準下，失效率的信賴界限 $[\hat{\lambda}_L, \hat{\lambda}_U]$ 須滿足下式：

$$\Pr\left\{\frac{\chi_{(1+\gamma)/2}^2(2r)}{2T(t_r)} \leq \lambda \leq \frac{\chi_{(1-\gamma)/2}^2(2r)}{2T(t_r)}\right\} = \gamma \quad (72)$$

亦即失效率推定值的信賴下限與信賴上限分別為：

$$\hat{\lambda}_L = \frac{\chi_{(1+\gamma)/2}^2(2r)}{2T(t_r)} \quad (73)$$

$$\hat{\lambda}_U = \frac{\chi_{(1-\gamma)/2}^2(2r)}{2T(t_r)} \quad (74)$$

同理，平均壽命或平均失效時間的信賴下限與信賴上限分別為：

$$\hat{\theta}_L = \frac{1}{\hat{\lambda}_U} = \frac{2T(t_r)}{\chi_{(1-\gamma)/2}^2(2r)} \quad (75)$$

$$\hat{\theta}_U = \frac{1}{\hat{\lambda}_L} = \frac{2T(t_r)}{\chi_{(1+\gamma)/2}^2(2r)} \quad (76)$$

而可靠度的信賴下限與信賴上限分別為：

$$\hat{R}_L = \exp(-\hat{\lambda}_U t) = \exp\left(-\frac{\chi_{(1-\gamma)/2}^2(2r)t}{2T(t_r)}\right) \quad (77)$$

$$\hat{R}_U = \exp(-\hat{\lambda}_L t) = \exp\left[-\frac{\chi_{(1+\gamma)/2}^2(2r)}{2T(t_r)}\right] \quad (78)$$

[範例 6] 假設某產品壽命為指數分佈，抽取 7 個試件執行要更換固定次數壽命試驗，截尾次數 $r = 9$ ，試驗結果 1 號試件 1 次，其失效時間為 650 hr，2 號試件失效 2 次，失效時間為 450 hr 與 700 hr，3 號試件失效 2 次，失效時間為 120 hr 與 400 hr，4 號試件失效 1 次，失效時間為 530 hr，5 號試件失效 1 次，失效時間為 600 hr，6 號試件失效 2 次，失效時間為 350 hr 與 600 hr，7 號試件無失效。

- (1). 求信賴水準為 0.90 之平均壽命 θ 的單邊信賴下限。
- (2). 求信賴水準為 0.90 之平均壽命 θ 的雙邊信賴界限。

[解答 6] 由題意知， $n = 7$ 、 $r = 9$ 、 $t_r = 700$ hr，

總試驗時間：

$$T(t_r) = 650 + 450 + 700 + 120 + 400 + 530 + 600 + 350 + 600 = 4900 \text{ hr},$$

首先計算 γ 信賴水準下，平均壽命 θ 的單邊信賴下限： $\hat{\theta}_L = \frac{2T(t_r)}{\chi_{(1-\gamma)}^2(2r)}$ ，

查卡方分佈表得： $\chi^2_{(1-0.9)}(2 \times 9) = \chi^2_{0.1}(18) = 25.989$

因此可計算得信賴水準為 $\gamma = 0.90$ 時， θ 的單邊信賴下限：

$$\hat{\theta}_L = \frac{2T(t_r)}{\chi^2_{(1-\gamma)}(2r)} = \frac{2 \times 4900}{25.989} = 377.1 \text{ hr}。$$

其次計算計算 γ 信賴水準下，平均壽命 θ 的雙邊信賴界限：

$$[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U] = \left[\frac{2T(t_r)}{\chi^2_{(1+\gamma)/2}(2r)}, \frac{2T(t_r)}{\chi^2_{(1-\gamma)/2}(2r)} \right]。$$

經查卡方分佈表得： $\chi^2_{(1+\gamma)/2}(2r) = \chi^2_{0.95}(18) = 9.390$ 、

$$\chi^2_{(1-\gamma)/2}(2r) = \chi^2_{0.05}(18) = 28.869，$$

因此可計算得信賴水準 $\gamma = 0.90$ 時， θ 的雙邊信賴界限：

$$[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U] = \left[\frac{2T(t_r)}{\chi^2_{(1-\gamma)/2}(2r)}, \frac{2T(t_r)}{\chi^2_{(1+\gamma)/2}(2r)} \right] = \left[\frac{2 \times 4900}{28.869}, \frac{2 \times 4900}{9.390} \right] = [339.5, 1043.7] \text{ hr}$$

所以平均壽命的雙邊信賴區間為 $[339.5, 1043.7] \text{ hr}$ 。

3.2.3 要更換固定時間壽命試驗

物品的壽命或失效時間為指數分佈，其機率密度函數為：

$$f_T(t) = \lambda \exp(-\lambda t), t > 0, \lambda > 0$$

現抽取 n 個樣本進行要更換固定時間壽命試驗，截尾時間為 t_0 ，假設試驗觀察結果在 $[0, t_0]$ 中有 r 個樣本失效，其失效發生時間依次為 $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_r$ 。在試驗過程中當物品發生失效時立即進行更換，如再發生失效，也立即更換，直到其中有一個試件的試驗時間達到 t_0 時停止試驗。

由上節可知此種壽命試驗規劃方式的總試驗時間 $T(t_0)$ 與機率參數 λ 的 MLE 點推定值 $\hat{\lambda}$ 分別為：

$$T(t_0) = t_1 + t_2 + \dots + t_r + (n - r)t_0 \quad (79)$$

$$\hat{\lambda} = \frac{r}{T(t_0)} \quad (80)$$

由於試驗是固定時間壽命試驗，在截尾時刻 t_0 時的失效次數 r 為隨機變數，一般記為 $N(t_0)$ ，此一隨機變數可用參數為 $n\lambda t_0$ 的波桑分佈來描述，亦即：

$$\Pr\{N(t_0)\} = \frac{(n\lambda t_0)^r}{r!} \exp(-n\lambda t_0) \quad (81)$$

3.2.4 不更換固定時間壽命試驗

物品的壽命或失效時間為指數分佈，其機率密度函數為：

$$f_T(t) = \lambda \exp(-\lambda t), t > 0, \lambda > 0$$

現抽取 n 個樣本進行不更換固定時間壽命試驗，截尾時間為 t_0 ，假設試驗觀察結果在 $[0, t_0]$ 中有 r 個樣本失效，其失效發生時間依次為 $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_r$ 。此種壽命試驗規劃方式所得到試驗結果的失效次數及總試驗時間均為隨機變數，因此有關區間推定變成相當複雜的問題。

由上節可知此種壽命試驗規劃方式的機率參數 λ 的總試驗時間 $T(t_0)$ 與 MLE 點推定值 $\hat{\lambda}$ 分別為：

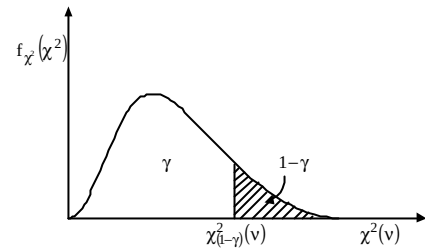
$$T(t_0) = t_1 + t_2 + \dots + t_r + (n - r)t_0$$

$$\hat{\lambda} = \frac{r}{T(t_0)}$$

由於試驗是固定時間壽命試驗，截尾時刻 t_0 時的失效次數 r 為隨機變數，因此總試驗時間 $T(t_0)$ 也是隨機變數，求取這種情況的信賴區間過程相當複雜，

附表 1: 卡方分佈分位數表

$$\Pr\{\chi^2 \geq \chi_{(1-\gamma)}^2\} = 1 - \gamma$$



$v \setminus \alpha$	0.99	0.95	0.90	0.80	0.50	0.20	0.10	0.05	0.01	$v \setminus \alpha$
1	0.0 ³ 157	0.0 ² 393	0.0158	0.0642	0.455	1.642	2.706	3.841	3.626	1
2	0.0201	0.103	0.211	0.446	1.386	3.219	4.605	5.991	9.210	2
3	0.115	0.352	0.584	1.005	2.366	4.642	6.251	7.815	11.345	3
4	0.297	0.711	1.064	1.649	3.357	5.989	7.779	9.488	12.277	4
5	0.554	1.145	1.610	2.343	4.351	7.289	9.236	11.070	15.088	5
6	0.872	1.635	2.204	3.070	5.348	8.558	10.645	12.592	16.812	6
7	1.239	2.167	2.833	3.822	6.346	9.803	12.017	14.067	18.475	7
8	1.646	2.733	3.490	4.594	7.344	11.030	13.362	15.507	20.090	8
9	2.088	3.325	4.168	5.380	8.343	12.242	14.634	16.919	21.666	9
10	2.558	3.940	4.865	6.179	9.342	13.442	15.987	18.307	23.209	10
11	3.053	4.575	5.578	6.989	10.341	14.631	17.275	19.675	24.725	11
12	3.571	5.226	6.304	7.807	11.340	15.812	18.549	21.026	26.217	12
13	4.107	5.892	7.042	8.634	12.340	16.985	19.812	22.362	27.688	13
14	4.660	6.571	7.790	9.467	13.339	18.151	21.064	23.635	29.141	14
15	5.229	7.261	8.547	10.307	14.339	19.311	22.307	24.996	30.578	15
16	5.812	7.962	9.312	11.152	15.338	20.465	23.542	26.296	32.000	16
17	6.408	8.672	10.85	12.002	16.338	21.615	24.769	27.587	33.409	17
18	7.015	9.390	10.865	12.857	17.338	22.760	25.989	28.869	34.805	18
19	7.633	10.117	11.651	13.716	18.338	23.900	27.204	30.144	36.191	19
20	8.260	10.851	12.443	14.578	19.337	25.038	28.412	31.410	37.566	20
21	8.897	11.591	13.240	15.445	20.337	26.171	29.615	32.671	38.932	21
22	9.542	12.338	14.041	16.314	21.337	27.301	30.813	33.924	40.289	22
23	10.196	13.091	14.848	17.187	22.337	28.429	32.007	35.172	41.638	23
24	10.856	13.848	15.659	18.062	23.337	29.553	33.196	36.415	42.980	24
25	11.524	14.611	16.473	18.940	24.337	30.675	34.382	37.652	44.314	25
26	12.198	15.379	17.292	19.820	25.336	31.795	35.563	38.885	45.642	26
27	12.879	16.151	18.114	20.703	26.336	32.912	36.741	40.113	46.963	27
28	13.565	16.928	18.939	21.588	27.336	34.027	37.916	41.337	48.278	28
29	14.256	17.708	19.768	22.475	28.336	35.139	39.087	42.557	49.588	29
30	14.953	18.493	20.599	23.364	29.336	36.250	40.256	43.773	50.892	30
40	22.164	26.509	29.051	32.352	39.335	37.263	51.805	55.758	63.391	40
60	37.485	43.188	46.459	50.647	59.335	68.969	74.397	79.082	88.379	60
80	53.540	60.391	64.278	69.213	79.334	90.403	96.578	101.879	112.329	80
100	70.065	77.929	82.358	87.950	99.334	111.667	118.498	123.342	135.807	100
200	156.432	168.279	174.835	183.006	199.333	216.618	226.021	233.994	249.445	200
Z_{α}	-2.33	-1.64	-1.28	-0.84	0.00	0.84	1.28	1.64	2.32	Z_{α}

註：近似公式為 $\chi_{\alpha}^2(v) \cong \frac{1}{2}(Z_{\alpha} + \sqrt{2v-1})^2$

例如： $\chi_{0.90}^2(30) \cong \frac{1}{2}(-1.28 + \sqrt{60-1})^2 = 20.487$